

知识与应用结合,素养与能力并重

——数列专题复习中的几个关键问题

●云南师范大学信息学院 唐明超

●广东省汕头市澄海中学 陈焕涛

●广东省佛山市顺德区容山中学 潘敬贞

摘要:本文中从考点、考查方式、命题背景等方面对近几年高考数列试题进行研究,认为:新一轮的高考数列专题复习备考要着力引导学生深化三个方面的理解,即理解数列的递推关系与数列的概念、理解 a_n 与 S_n 的关系及其函数属性、理解数列的基本性质及其生成过程;要重视回归教材、重视知识的综合应用、重视数学思想的渗透、重视情景化教学;做好从解题到解决问题、从课堂上学到生活中学、从模式化应试到力求创新三方面的转变.

关键词:高中数学;数列;备考策略

1 引言

数列是高中数学的重要内容之一,也是培育学生数学运算、逻辑推理、数学抽象等核心素养的重要载体.在数列专题复习教学中,怎样有效利用数列知识,培养学生数学“四基”、提升数学“四能”、发展数学素养?这是值得一线教师思考的课题.笔者认为:数列专题复习教学要着力引导学生既要理解数列的递推关系与数列的概念、理解 a_n 与 S_n 的关系及其函数属性、理解数列的基本性质及其生成过程;又要重视回归教材、重视知识的综合应用、重视数学思想的渗透、重视情景化教学;还要做好从解题到解决问题的转变、从课堂上学到生活中学的转变、从模式化应试到力求创新的转变.

2 深化三个理解

2.1 理解数列的递推关系与数列的概念

在复习备考过程中,需要引导学生在元认知发展水平的基础上再次认识数列的递推关系与数列的概念,帮助学生真正理解数列是反映自然界变化规律的基本数学模型,是数学的重要研究对象,是研究其他类型函数的基本工具^[1].高中数学重点学习等差和等比两个特殊的数列,之所以特殊是由于它们从第二项开始后一项与前一项总存在着一定的数量关系,这种关系就叫做递推关系,用递推关系来定义数列可以清晰地刻画每一组排列数的规律.要求学生能用自己的

语言准确描述数列的概念,结合生活实际列举生活中的等差等比数列实例,既可以让学再次认识数列的本质又可以养成用数学的眼光看世界,用数学的思维分析问题的良好习惯.

2.2 理解 a_n 与 S_n 的关系及其函数属性

深化“数列是一种特殊函数”的理解,将数列与函数有机结合起来,清楚两者之间的关系是学习数列的关键.等差等比数列的通项公式是可以通过对等差等比数列概念中的递推关系进行合理的运算推理得到它们的排列顺序(序号)与数列对应项之间的特殊规律,将这种规律用文字描述出来就是数列的通项公式,通项公式是一个关于 $n, n \in \mathbf{N}^*$ 的特殊函数.研究等差或等比数列前 n 项的和可以得出前 n 项和 S_n 与项数 n 的关系,这个关系也是一个关于 $n, n \in \mathbf{N}^*$ 的特殊函数,称之为数列的前 n 项和公式.当然,不是所有的数列都能用简练的数学语言将其通项公式或者前 n 项和公式描述出来,我们研究的往往是一些特殊的数列.引导学生去发现前 n 项和 S_n 与第 n 项 a_n 之间存在的关系 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$,并尝试去发现和挖掘其他的一些重要性质.

2.3 理解数列的基本性质及其生成过程

数列基本性质的学习要强调探究性与过程性,还原知识的发生与发展过程,帮助学生在体验知识形成逻辑的同时构建知识网络.设计好问题情景引导学生开展探究活动,及时提炼课堂生成,比如在推导等差数列或等比数列通项公式与前 n 项和公式的过程中,



要让学生体验到总可以由五个关键的基本量来刻画数列,它们分别是首项 a_1 ,公差 d 或公比 q ,项数 n ,第 n 项 a_n 与前 n 项和 S_n ;如果给出数列的前几项或者某几项之间的关系,亦或者直接给出5个基本量中的3个就可以计算出另外2个基本量.

3 引起四个重视

3.1 重视回归教材,强调基础扎实

3.1.1 挖掘典型的教材例题与习题

教材是教与学最重要的素材,立足教材研究高考试题寻找命题规律是备考中的重要环节,只有清楚高考考什么、怎么考,备考工作才能有的放矢.教材中有很多经典的例题或者习题可以结合不同认知发展水平学生的实际需要进行合理开发,形成研究性学习的素材或者变式题组.限于篇幅,文章仅举两例.

试题1 (人教A版必修5第38页例3)已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = pn + q$,其中 p, q 为常数,那么这个数列一定是等差数列吗?

设计意图:学生会根据首项和公差求通项公式,但是对等差数列的证明很多学生还达不到深刻理解的要求.解决这个课本例题,一方面可以帮助学生回顾等差数列的证明过程,另一方面加深对等差数列通项公式的认识,发现 p 为公差, $p+q$ 为首项,经历了一个二级结论的生成过程,在问题解决的过程中获得了额外的收获.

试题2 (人教A版必修5第69页第6题)已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 5, a_2 = 2, a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} (n \geq 3)$,对于这个数列的通项公式作一研究,能否写出它的通项公式?

设计意图:在给出足够条件的情况下学生能顺利计算等差或等比以及其他常见递推关系的数列通项公式,借助这一典型问题可以引导学生更加深入地认识如何根据已知递推关系求解数列的通项公式,在问题解决的过程中落实四基、发展四能.

3.1.2 对典型例习题开展变式拓展

选定典型的问题后,可以对其进行适当的变式拓展以丰富教学素材.试题1与试题2可以做以下变式.

变式1-1 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = pn^2 + qn + r$,其中 p, q, r 为常数,且 $p \neq 0$,数列 $\{a_n\}$ 在何种情况下是等差数列?

变式1-2 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} (n > 1)$ 是否成立? $2a_n = a_{n-k} + a_{n+k} (n > k > 0)$ 是否成立?据此你能得出什么结论.

变式2-1 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足

$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$,证明 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 是等比数列;若 $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{3}{2}$,求出它的通项公式,你能有几种方法?

变式2-2 求解满足递推关系 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ 的正项数列 $\{a_n\}$ 的通项公式,用到了什么思想方法?

3.1.3 研究高考试题的命题规律

引导学生以历年高考真题作为练习素材,对试题按照知识点、考查方式、难度进行分类,归纳总结解题方法,探究试题的命题意图,不仅要知道怎么解答,还要知道为什么要这样解,清楚试题的命题逻辑,以不变应万变.模仿高考试题的命题特点对教材中的典型例题和习题开展一系列的变式拓展,采取小组合作的形式从不同的角度对试题进行改编,给出解答过程,最后讨论并优化问题的设置,实现在解题的过程中研究试题,在改编试题的过程中发展能力.

3.2 重视知识的综合应用,强调融会贯通

首先,夯实四基,提升运算求解能力.以基础试题为素材,在问题解决的过程中深化基础知识与基本技能,感悟数学思想在解决实际问题中的应用价值,积累基本活动经验,提高分析问题和解决问题的能力,为解决综合性强或者富有创新性的问题打下坚实的基础.

其次,熟练解答高考真题,体会试题生成逻辑.以高考试题为载体,研究高考试题的命题意图,分解试题中的考点,基于试题的呈现方式和设问方向思考知识点的整合逻辑,在能解题的基础上弄清楚试题是如何命题的,为什么要这样考,我该如何应对等问题.

再者,需要引导学生关注由多个知识点交汇命题的试题.这类试题由于综合性较强、思维难度较大、对学生的逻辑推理和运算求解能力要求较高而成为试卷中的中等以上难度的试题,往往具有明显的区分度.需要及时归纳总结求解策略,研究试题的命题原理.

3.3 重视数学思想的渗透,强调灵活创新

3.3.1 感悟函数与方程的思想

在实际问题情境中,根据已知条件提炼出等差或等比数列中的五个关键基本量之间的数量关系,建立方程或方程组,通过解方程完成对问题的解答.素材的选取要具有典型性,突出基础性,强调通法常法,如试题3.

试题3 (2020年全国2卷文6题)记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.若 $a_5 - a_3 = 12, a_6 - a_4 = 24$,则 $\frac{S_n}{a_n} = (\quad)$.

- A. $2^n - 1$ B. $2 - 2^{1-n}$
C. $2 - 2^{n-1}$ D. $2^{1-n} - 1$

3.3.2 深化转化与化归的思想

引导学生将不好解决的问题转化为容易解决的

问题,进而实现对问题的解答,感悟转化与化归的数学思想,体验化难为易、化繁为简的便捷,如试题 4 就需要将问题转化为等差数列求和来处理.

试题 4 (2020 年全国 2 卷理 4 题)北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所,分上、中、下三层,上层中心有一块圆形石板(称为天心石),环绕天心石砌 9 块扇面形石板构成第一环,向外每环依次

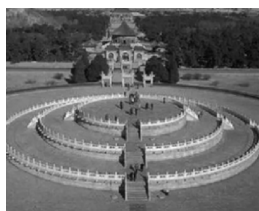


图 1

增加 9 块,下一层的第一环比上一层的最后一环多 9 块,向外每环依次也增加 9 块,已知每层环数相同,且下层比中层多 729 块,则三层共有扇面形石板(不含天心石)().

A.3 699 块

B.3 474 块

C.3 402 块

D.3 339 块

3.3.3 强化分类与整合的思想

数列是特殊的函数,在实际问题中需要对其进行严谨的分析与推理,实现在分类与整合的过程中解答问题,分类的标准因问题而异,大多出现在奇偶项数列不相同的情况下,如试题 5 的情形.

试题 5 (2020 年全国 1 卷文 16 题)数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} + (-1)^n a_n = 3n - 1$, 前 16 项和为 540, 则 $a_1 =$ _____.

3.4 重视情景化教学,强调学以致用

3.4.1 再现知识的发生与发展情景

以问题为导向开展复习课教学,可以结合学生的认知发展水平设计一系列的问题串引导学生在逐个解决问题的过程中感悟知识的发生与发展过程,比如在解决试题 1 的基础上还可以设计以下问题串帮助学生理解等差或等比数列通项公式的推导过程.

问题 1 请写出等差数列通项公式的推导过程,用到什么方法?

问题 2 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = n$, $a_1 = 1$, 请写出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

问题 3 类比问题 1 和问题 2, 能否对等比数列开展同样的探究活动,为什么?

3.4.2 了解数学文化,感悟数学之美

教科书的阅读与思考栏目会设置一些数学文化素材,如斐波那契数列,可以引导学生在开展探究性学习的同时联系与之相关的高考试题.如 2012 年江西高考理科第 6 题,观察各式: $a + b = 1; a^2 + b^2 = 3; a^3 + b^3 = 4; a^4 + b^4 = 7; a^5 + b^5 = 11$; 依此类推,求 $a^{10} + b^{10}$ 的值;再比如九连环的问题都在高考中考查过.

3.4.3 关注生产生活实践,抽象数学问题

数学源于生活,又应用于社会生产生活实践.在学习的过程中要学会用数学的眼光观察世界,用数学的思维思考世界,将实际生活问题抽象成数学问题进而用数学的思想方法来解决.比如 2016 年四川高考数学理科第 5 题,某公司为激励创新,计划逐年加大研发资金投入,若该公司 2015 年全年投入研发资金 130 万元,在此基础上,每年投入的研发资金比上一年增长 12%,则该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元的年份是哪一年? 该题考查的问题本质就是等比数列的通项公式.

4 寻求三个转变

4.1 从解题到解决问题的转变

高考新一轮改革的步伐持续推进,需要在认真研究《普通高中数学课程标准(2017 年版)》和《中国高考评价体系》的基础上开展复习课教学设计,紧扣课标要求和“一核”“四层”“四翼”的评价理念,从以往的注重解题教学转变为解决问题的教学,在具体问题情境中去发现问题、思考并解决问题,杜绝纸上谈兵.

4.2 从课堂上学到生活中学的转变

近年的高考数列试题涵盖了数列的核心知识点,“四基”是基础也是关键.基础知识可以在课堂上获得,但是运用基础知识解决现实生活中的具体问题还需要我们有意识的思考和关注身边的现象,所以学习数学应该适当融入社会生产生活实践中去,毕竟高考也注重考查数列在实际生活中的应用,既强调了综合性还注重应用性.比如 2020 年全国 II 卷理科 12 题考查的是数列与信息技术的融合,需要类比研究周期函数的方法去解决问题.

4.3 从模式化应试到力求创新的转变

在以往的复习备考过程中,我们习惯性地归纳考试题型,解题方法.在新高考改革背景下我们需要打破思维定势,丰富备考策略.从学习数学解题方法到学会创新性的思考数学问题的转变,基于数学基本概念和性质,结合社会生产生活实际需要研究新问题,开辟新思路.创新往往是开放的,也是最有价值的,它既是时代的需要,也是人才培养的关键.

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部制定.普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[M]. 北京:人民教育出版社,2020. 