

2022 届高三基地学校第三次大联考

数学参考答案及评分建议

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1~4 B C D B 5~8 A C B A

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

9. AC 10. ABD 11. BCD 12. ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{16}{25}$ 14. 256 15. $-x^3 + 2x^2$ 16. 4, 4

注：15 题可设 $f'(x) = a(x-b)(x-c) + d$ ，满足 $a < 0, b < c, 1 < c < 2, f(1) > f(2)$ 。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

【解】(1) 因为 $b \sin \frac{B+C}{2} = a \sin B$ ，由正弦定理得 $\sin B \sin \frac{B+C}{2} = \sin A \sin B$ ，

因为 $0 < B < \pi$ ，所以 $\sin B \neq 0$ ，

所以 $\sin \frac{B+C}{2} = \sin A$. …… 2 分

又因为 $B+C = \pi - A$ ，所以 $\cos \frac{A}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$ ，

因为 $0 < A < \pi$ ， $0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\cos \frac{A}{2} \neq 0$ ，

所以 $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ ， …… 4 分

所以 $\frac{A}{2} = \frac{\pi}{6}$ ，即 $A = \frac{\pi}{3}$. …… 5 分

(2) 由条件， $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高为 $h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，

因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}a \cdot h$ ，且 $b = 6$ ， $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

所以 $\frac{1}{2} \times 6 \times c \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times a \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，解得 $a = 2c$. …… 8 分

所以由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ，

则 $(2c)^2 = c^2 + 6^2 - 2 \times c \times 6 \times \frac{1}{2}$ ，

解得 $c = \sqrt{13} - 1$. ……10 分

18. (12 分)

【解】(1) 由 $y = c \cdot x^b$ ($b, c > 0$) 得 $\ln y = \ln c + b \ln x$,

由 $v_i = \ln x_i$, $u_i = \ln y_i$, 得 $u = b \cdot v + a$, 且 $a = \ln c$,

$$\text{则 } \hat{b} = \frac{75.3 - 24.6 \times 18.3 \div 6}{101.4 - 24.6^2 \div 6} = \frac{0.27}{0.54} = \frac{1}{2}, \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\hat{a} = \bar{u} - \hat{b}\bar{v} = (18.3 - \frac{1}{2} \times 24.6) \div 6 = 1, \text{ 得 } \hat{a} = \ln \hat{c} = 1, \text{ 故 } \hat{c} = e.$$

所以 y 关于 x 的回归方程为 $y = e \cdot x^{\frac{1}{2}}$. \dots\dots 6 分

(2) 要使误差 ε_n 在 $(-0.1, 0.1)$ 的概率不少于 0.9545,

$$\text{则 } (\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma) \subseteq (-0.1, 0.1), \text{ 且 } \mu = 0, \quad \sigma = \sqrt{\frac{2}{n}}, \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } 0.1 \geq 2\sqrt{\frac{2}{n}},$$

$$\text{解得 } n \geq 800. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (12 分)

【解】(1) 正项数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1$, 满足 $S_{n+1} = (\sqrt{S_n} + S_1)^2$.

$$\text{所以 } \sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} = 1,$$

所以数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是以 1 为首项 1 为公差的等差数列. \dots\dots 2 分

$$\text{所以 } \sqrt{S_n} = 1 + n - 1 = n, \text{ 所以 } S_n = n^2. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1,$$

当 $n = 1$ 时也成立,

$$\text{所以 } a_n = 2n - 1. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{a_n + 1}{a_n a_{n+1}}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right), \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + \dots + (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1} \right].$$

所以当 n 为奇数时, $T_n = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2n+1}) > \frac{1}{2}$; 9 分

当 n 为偶数时, $T_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n+1})$, 由 $\{T_n\}$ 递增, 得 $T_n \geq T_2 = \frac{2}{5}$.

所以 T_n 的最小值为 $\frac{2}{5}$12 分

20. (12 分)

【证】(1) 连结 EG 并延长交 BC 于点 D .

因为点 G 是 $\triangle BCE$ 的重心,

所以点 D 是 BC 的中点,

所以 D, E, F 分别是棱 CB, AB, PB 的中点,

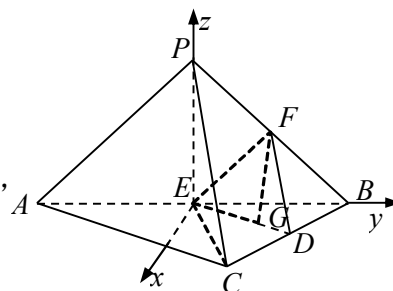
所以 $DE \parallel AC, EF \parallel AP$ 2 分

因为 $DE, EF \not\subset$ 平面 $PAC, AC, AP \subset$ 平面 PAC ,

所以 $DE \parallel$ 平面 $PAC, EF \parallel$ 平面 PAC .

因为 $DE, EF \subset$ 平面 $EFG, DE \cap EF = E$,

所以平面 $EFG \parallel$ 平面 PAC 5 分



【解】(2) 由 (1) 知, 二面角 $B-EF-G$ 与二面角 $B-AP-C$ 的大小相等.

连结 PE , 因为 $PA = PB$, E 是 AB 的中点, 所以 $PE \perp AB$.

因为平面 $PAB \perp$ 平面 ABC , 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABC = AB, PE \subset$ 平面 PAB ,

所以 $PE \perp$ 平面 ABC 7 分

以 E 为坐标原点, 以 $\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EP}$ 所在直线分别为 y 轴, z 轴, 以与 $\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EP}$ 垂直的方向为 x 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$.

设 $AB = 2$, 则 $BC = 1, P(0, 0, 1), A(0, -1, 0), B(0, 1, 0), C(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$,

所以 $\overrightarrow{AP} = (0, 1, 1), \overrightarrow{AC} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0), \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0)$,

则平面 ABP 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (1, 0, 0)$ 8 分

设平面 APC 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} y + z = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y = 0, \end{cases}$ 令 $x = \sqrt{3}$, 得 $y = -1, z = 1$,

所以 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, -1, 1)$10 分

设二面角 $B-AP-C$ 的大小为 θ ,

$$\text{则 } |\cos \theta| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| \times |\mathbf{n}|} = \frac{|\sqrt{3}|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

因为二面角 $B-AP-C$ 为锐二面角,

$$\text{所以 } \cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

所以二面角 $B-EF-G$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$12 分

注: 第二问传统方法求解, 同样按步给分.

21. (12 分)

【解】(1) 设椭圆的焦距为 $2c$,

由 $\triangle MF_1F_2$ 的面积最大时, 其内切圆半径为 $\frac{b}{3}$,

$$\text{得 } \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot b = \frac{1}{2} \cdot (2a + 2c) \cdot \frac{b}{3}, \text{ 化简可得 } \frac{c}{a} = \frac{1}{2}. \quad \text{..... 2 分}$$

因为椭圆的长轴长为 4, 所以 $2a = 4$,

故 $a = 2$, 所以 $c = 1$, 则 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$,

$$\text{所以椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \quad \text{..... 4 分}$$

(2) 设直线 PQ 的方程为 $y = kx + m$,

直线 AB 的方程为 $y = k_1(x+1)$, 直线 CD 的方程为 $y = k_2(x+1)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = k_1(x+1), \\ y = kx + m \end{cases} \text{ 得 } x_p = \frac{m - k_1}{k_1 - k},$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = k_1(x+1), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \text{ 得 } (3 + 4k_1^2)x^2 + 8k_1^2x + 4k_1^2 - 12 = 0.$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } x_p = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{4k_1^2}{3 + 4k_1^2},$$

$$\text{所以 } -\frac{4k_1^2}{3 + 4k_1^2} = \frac{m - k_1}{k_1 - k}, \quad \text{..... 6 分}$$

$$\text{化简得 } 4(k - m)k_1^2 + 3k_1 - 3m = 0.$$

同理 $4(k-m)k_2^2 + 3k_2 - 3m = 0$,

所以 k_1, k_2 为方程 $4(k-m)x^2 + 3x - 3m = 0$ 的两根, 8 分

所以 $k_1 + k_2 = -\frac{3}{4(k-m)}$.

又 $k_1 + k_2 = 3$, 所以 $k = m - \frac{1}{4}$,

所以直线 PQ 的方程为 $y = \left(m - \frac{1}{4}\right)(x+1) + \frac{1}{4}$,

故直线 PQ 恒过定点 $H\left(-1, \frac{1}{4}\right)$10 分

因为 F_1, H 为定点, 又 $F_1E \perp PQ$,

所以当 $T\left(-1, \frac{1}{8}\right)$ 为 F_1H 中点时, ET 为定值.12 分

22. (12 分)

【解】(1) 因为 $f(x) = e^x - \cos x - x$, 所以 $f'(x) = e^x + \sin x - 1$,

记 $g(x) = e^x + \sin x - 1$, 则 $g'(x) = e^x + \cos x$.

① 当 $x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ 时, 函数 $g'(x) = e^x + \cos x$ 单调递增,

又 $g'(-\pi) = e^{-\pi} - 1 < 0$, $g'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} > 0$,

故存在唯一实数 $x_0 \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, 使得 $g'(x_0) = 0$,

此时

x	$(-\pi, x_0)$	x_0	$(x_0, -\frac{\pi}{2})$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	\searrow	极小值	\nearrow

因为 $g(-\pi) = e^{-\pi} - 1 < 0$, $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} - 2 < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ 无零点, 即 $f'(x)$ 无零点,

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ 上无极值点. 3 分

② 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) = e^x + \cos x > 0$,

所以函数 $g(x)$ 单调递增, 即函数 $f'(x)$ 单调递增.

又 $f'(0)=0$ ，此时

x	$(-\frac{\pi}{2}, 0)$	0	$(0, \frac{\pi}{2})$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow	极小值	\nearrow

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\pi, \frac{\pi}{2})$ 上的极值点的个数为 1 个. 5 分

(2) 因为 $f'(x) = e^x + \sin x - 1$ ， $2f'(x) \geq 3\sin x - m \ln(x+1)$ ，

所以 $2e^x + m \ln(x+1) - \sin x - 2 \geq 0$.

令 $h(x) = 2e^x + m \ln(x+1) - 2 - \sin x$ ，则 $h'(x) = 2e^x + \frac{m}{x+1} - \cos x$.

①当 $m \geq 0$ 时， $2e^x - \cos x \geq 0$ ， $\frac{m}{x+1} \geq 0$ ，所以 $h'(x) \geq 0$ ，

所以 $h(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递增，故 $h(x) \geq h(0) = 0$ ，所以 $m \geq 0$ 7 分

②当 $m < 0$ 时， $h'(x) = 2e^x + \frac{m}{x+1} - \cos x$ ，

$h''(x) = 2e^x - \frac{m}{(x+1)^2} + \sin x \geq 0$ 恒成立，

所以 $h'(x)$ 在 $x \in [0, \pi]$ 上为增函数，即 $h'(x) \geq h'(0) = m+1$.

当 $-1 \leq m < 0$ 时， $h'(x) \geq 0$ ，所以 $h(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递增， $h(x) \geq h(0) = 0$ ，

所以 $-1 \leq m < 0$.

当 $m < -1$ 时， $h'(0) = m+1 < 0$ ， $h'(\pi) = 2e^\pi + \frac{m}{\pi+1} + 1$ ，

若 $h'(\pi) \leq 0$ ，即 $m \leq -(\pi+1)(2e^\pi + 1)$ ，此时 $h'(\pi) \leq 0$ 恒成立，

所以 $x \in (0, \pi)$ 时， $h'(x) < 0$ 恒成立， $h(x) < h(0) = 0$ ，不合题意；

若 $h'(\pi) > 0$ ，即 $-(\pi+1)(2e^\pi + 1) < m < -1$ ，

此时存在 $x_0 \in (0, \pi)$ ，使得 $h'(x_0) = 2e^{x_0} + \frac{m}{x_0+1} - \cos x_0 = 0$ ，

当 $x \in (0, x_0)$ 时， $h'(x) < 0$ 恒成立，所以 $h(x) < h(0) = 0$ ，不合题意.

综上，实数 m 的取值范围为 $[-1, +\infty)$ 12 分