“设而不求”巧思维,圆锥曲线妙突破

◉江苏省泗洪中学 刁俊东

“设而不求”是高中数学中一种非常特殊的解题技巧与方法,是数学整体思想的一个特例,通过整体结构意义上的变式与拓展以及整体思维的应用来分析与处理问题,更是破解平面解析几何问题,特别是圆锥曲线问题中的基本手段之一.在破解圆锥曲线问题中,“设而不求”可以有效融合参数的关系式,整体处理,大大减少代数运算量,结合定义巧切入、向量妙应用、利用不等式、借助“点差法”、平几妙突破等方式来“设而不求”,优化过程,简化运算,提升解题效益.

1 定义巧切入

巧妙借助圆锥曲线的相关定义,挖掘问题的本质,通过椭圆、双曲线、抛物线等的定义来巧妙建立关系式,整体代换,“设而不求”,巧妙处理.

例1 (2020年高考数学新高考Ⅰ卷(山东卷)第13题)斜率为$\sqrt{3}$的直线过抛物线$C:y^2=4x$的焦点,且与C交于A,B两点,则$|AB|=$______.

分析:根据题目条件,先确定焦点弦所对应的直线方程,联立直线与抛物线方程,转化为对应的二次方程,直接利用韦达定理加以转化,“设而不求”,结合抛物线的定义以及焦点弦公式加以转化与应用.

解析:由抛物线$C:y^2=4x$,可知C的焦点为$F(1,0)$,$p=2$,而直线AB过焦点F且斜率为$\sqrt{3}$,则直线AB的方程为$y=\sqrt{3}(x-1)$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,将直线AB的方程代入抛物线$C:y^2=4x$,化简整理可得$3x^2-10x+3=0$,利用韦达定理得到$x_1+x_2=\frac{10}{3}$.

由抛物线的定义,可得$|AB|=|AF_1|+|BF_1|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}=x_1+x_2+p=\frac{10}{3}+2=\frac{16}{3}$.

故填答案:$\frac{16}{3}$.

点评:合理通过椭圆、双曲线、抛物线等定义的切入,建立题目条件与圆锥曲线定义之间的关系,结合代数式或不等式等的变形与应用,“设而不求”,从中剔除参数达到求解的目的,化繁为简,提升解题效益.

2 向量妙应用

巧妙借助平面向量的相关知识,特别是平面向量的坐标运算、数量积等,合理串联起直线与圆锥曲线之间的联系,“设而不求”,合理运算,巧妙转化.

例2 (2019年高考数学北京卷理科第18题)已知抛物线$C:x^2=-2py$经过点$(2,-1)$.

(Ⅰ)求抛物线C的方程及其准线方程;

(Ⅱ)设O为原点,过抛物线C的焦点作斜率不为0的直线l交抛物线C于两点M,N,直线$y=-1$分别交直线OM,ON于点A和点B.求证:以AB为直径的圆经过y轴上的两个定点.

分析:解决涉及直线与抛物线的位置关系问题时,通过设出直线方程,联立直线与抛物线的方程组,进而确定对应坐标的表达式,引入平面向量,通过向量的坐标运算与数量积加以巧妙转化,“设而不求”,进而得以证明定点问题.

解析:(Ⅰ)由抛物线$C:x^2=-2py$经过点$(2,-1)$,得$p=2$,可得抛物线C的方程为$x^2=-4y$,其准线为$y=1$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知抛物线C的焦点为$F(0,-1)$,设直线l的方程为$y=kx-1(k\neq 0)$.

设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,由$\begin{cases}y=kx-1,\\x^2=-4y,\end{cases}$得$x^2+4kx-4=0$,结合韦达定理可得$x_1x_2=-4$,而直线$OM$的方程为$y=\frac{y_1}{x_1}x$.

令$y=-1$得点$A\left(-\frac{x_1}{y_1},-1\right)$,同理得点$B\left(-\frac{x_2}{y_2},-1\right)$.

设点$D(0,n)$,则$\overrightarrow{DA}=\left(-\frac{x_1}{y_1},-1-n\right)$,$\overrightarrow{DB}=\left(-\frac{x_2}{y_2},-1-n\right)$,$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{x_1x_2}{y_1y_2}+(n+1)^2=$

$\dfrac{x_1x_2}{\left(-\dfrac{x_1^2}{4}\right)\left(-\dfrac{x_2^2}{4}\right)}+(n+1)^2=\dfrac{16}{x_1x_2}+(n+1)^2=-4+(n+1)^2$，令 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，即 $-4+(n+1)^2=0$，得 $n=1$ 或 $n=-3$.

故以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的定点 $(0,1)$ 和 $(0,-3)$.

点评：直线与圆锥曲线的方程联立，利用韦达定理加以转化，通过平面向量的坐标表示，结合向量的坐标运算、数量积等，综合相关的位置关系等加以整合，"设而不求"，巧妙代入，破解问题.

3 利用不等式

巧妙通过基本不等式的应用，构造参数之间的关系，"动""静"结合，合理转化，"设而不求"，在破解一些最值问题中经常应用.

例3 （2020年高考数学全国卷Ⅱ文科第9题，理科第8题）设 O 为坐标原点，直线 $x=a$ 与双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于 D，E 两点，若 $\triangle ODE$ 的面积为 8，则 C 的焦距的最小值为（　　）.

A.4　　B.8　　C.16　　D.32

分析：根据双曲线的两条渐近线的方程，结合条件确定线段 DE 的长度，利用三角形的面积加以转化，得到 $ab=8$，利用基本不等式，结合双曲线的几何性质"设而不求"，从而得以确定对应的最值问题.

解析：由于双曲线 C 的两条渐近线的方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，将 $x=a$ 代入可得 $y=\pm b$，可得 $|DE|=2b$，则有 $S_{\triangle ODE}=\dfrac{1}{2}|DE|\cdot a=ab=8$，利用基本不等式，可得双曲线 C 的焦距 $2c=2\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 2\sqrt{2ab}=8$，当且仅当 $a=b=2\sqrt{2}$ 时等号成立，所以 C 的焦距的最小值为 8.故选 B.

点评：合理通过基本不等式的应用，"设而不求"，把"静"态的圆锥曲线问题"动"起来，进而确定相关参数的最值点.

4 借助"点差法"

巧妙借助直线的斜率公式，结合"点差法"的变形与转化，构建直线与圆锥曲线之间的关系，"设而不求"，代数运算，转化变形.

例4 （2020年高考数学浙江卷第21题）如图1，已知椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，抛物线 C_2：$y^2=2px(p>0)$，点 A 是椭圆 C_1 与抛物线 C_2 的交点，过点 A 的直线 l 交椭圆 C_1 于点 B，交抛物线 C_2 于点 M（B，M 不同于 A）.

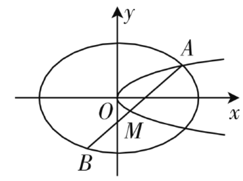

图1

（Ⅰ）若 $p=\dfrac{1}{16}$，求抛物线 C_2 的焦点坐标；

（Ⅱ）若存在不过原点的直线 l 使点 M 为线段 AB 的中点，求 p 的最大值.

分析：设出点 A 与点 M 的坐标，借助直线的斜率公式，通过"点差法"的变形与转化来确定对应的值，进而建立参数之间的关系式，利用主元法并结合方程思维，再结合条件加以分析与处理.

解析：（Ⅰ）由 $p=\dfrac{1}{16}$，得抛物线 C_2 的焦点坐标是 $\left(\dfrac{1}{32},0\right)$.

（Ⅱ）设 $A(2pa^2,2pa)$，$M(2pm^2,2pm)$，则有 $k_{AM}\cdot k_{OM}=\dfrac{2pa-2pm}{2pa^2-2pm^2}\cdot\dfrac{2pm}{2pm^2}=\dfrac{1}{m(m+a)}$.

又由"点差法"可知，$k_{AM}\cdot k_{OM}=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\cdot\dfrac{\frac{y_A+y_B}{2}}{\frac{x_A+x_B}{2}}=\dfrac{y_A^2-y_B^2}{x_A^2-x_B^2}=\dfrac{\left(1-\frac{x_A^2}{2}\right)-\left(1-\frac{x_B^2}{2}\right)}{x_A^2-x_B^2}=-\dfrac{1}{2}$，

则有 $\dfrac{1}{m(m+a)}=-\dfrac{1}{2}$，即 $m^2+am+2=0$，可得 $\Delta=a^2-8\geqslant 0$，即 $a^2\geqslant 8$.

而 $A(2pa^2,2pa)$ 在椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，可得 $\dfrac{(2pa^2)^2}{2}+(2pa)^2=1$，所以 $p^2=\dfrac{1}{2a^4+4a^2}\leqslant\dfrac{1}{160}$，解得 $p\leqslant\dfrac{\sqrt{10}}{40}$，当且仅当 $a^2=8$ 时等号成立，故 p 取到最大值 $\dfrac{\sqrt{10}}{40}$.

点评：在破解一些直线与圆锥曲线的位置关系问题时，经常借助"点差法"来求解相关直线的斜率.引入点的坐标，利用"点差法"，通过作差确定与转化相关直线的斜率，借助题目条件，"设而不求"，柳暗花明.