回归教材起始点 抢占备考制高点

杨海涛 （江苏省盐城市建湖高级中学 224700）

摘 要：盲目做题、过度刷题，不但增加学生的学习负担，而且也无益于学生高考成绩的提高．高三毕业班师生应放弃题海战术，将更多精力放在深入研究教材典型例习题上．本文以对题目的分析来印证对现有命题的一般化思考，挖掘命题中的内在对称性，以“本”为本才是科学应考思路．

关键词：命题思考；习题研究；高三备考

文章编号：1004-1176(2022)01-0039-04

将2021年高考数学全国卷Ⅰ试题与中学教科书做针对性的详细对照可以发现，试卷中有相当数量的试题可以在高中教科书中找到它们的影子，这些“影子”对于解决这些高考试题有着至关重要的作用：夯实基础，以不变应万变．新高考卷用不争的考题证明：盲目做题、过度刷题，不但增加学生的学习负担，而且也无益于学生高考成绩的提高．这对于引导师生放弃题海战术，将更多的精力放在研读教科书和探究典型题型上，具有十分重要的意义．新一届乃至以后的高三复习备考都必须遵循回归教材、紧抓典型例题、深入研究的原则．从教材原点走向备考的制高点才是高考复习备考的王道．

例1 （2021年全国卷Ⅰ第6题）若 $\tan\theta=-2$，则 $\dfrac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=$（ ）．

A．$-\dfrac{6}{5}$ B．$-\dfrac{2}{5}$ C．$\dfrac{2}{5}$ D．$\dfrac{6}{5}$

命题要害剖析与简解 这是一道特殊情况下的三角函数条件求值问题．我们说它特殊，是因为这道题中的目标分式表面上不是（三角函数）齐次分式，但利用三角恒等式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 以及弦化切稍加转化，立刻有 $\dfrac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)}\cdot\dfrac{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\dfrac{\tan\theta}{(\tan\theta+1)}\cdot\dfrac{(\tan^2\theta+2\tan\theta+1)}{(\tan^2\theta+1)}$，将已知条件代入运算即可，正确答案为C．

评注 上面的分式实际上是可以进一步化简的，但我们认为，该分式能化简只是一种偶然现象，且不关乎问题处置的本质（因为此时已可直接代入计算而无任何实质性困难了）．事实上，教科书中类似问题有不少，比如：

问题1 （人教2019A版必修第一册[1]第253页第4题）已知 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$，计算：

（1）$\dfrac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{5\cos\alpha-\sin\alpha}$，（2）$\dfrac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$，（3）（4）略．

问题2 （苏教2020版必修第一册[2]第181页第15题）（1）设 $\tan\alpha=2$，计算 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$；

（2）设 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$，计算 $\dfrac{1}{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}$．

问题3 （北师大版必修第二册[3]第160页复习题A组第4题）已知 $\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$，计算：

（1）$\dfrac{3\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha-4\cos\alpha}$，

（2）$2\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha$．

很显然，这道高考题就是上述这些课后习题的简单改造．必须指出，以上问题是基于同角三角函数关系化简求值的一类典型问题及典型处理方法（此法由于问题的特殊性，回避了具体求出 $\sin\alpha$ 及 $\cos\alpha$ 的过程），但绝不是求解此类问题的根本方法．根本方法是知道一个角的某一个三角函数值，利用同角三角函数关系求出另外的几个（或确定某些三角函数不存在）．例如，将问题改为“已知设 $\tan\alpha=2$，计算 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha+5}{\sin\alpha-\cos\alpha}$”，就不能回避具体 $\sin\alpha$ 及 $\cos\alpha$ 求值了（当然具体求解过程还是可以利用一些小技巧的，比如将目标分式 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha+5}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ 拆分为两部分 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}+$

$\dfrac{5}{\sin\alpha-\cos\alpha}$,前者可以利用我们熟悉的老办法解决).

例 2 (2021 年全国卷Ⅰ第 13 题) 已知函数 $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$ 是偶函数,则 $a=$______;

命题要害剖析与简解 这道题重点考查函数的性质(高中阶段主要包括单调性、奇偶性和周期性),当然以往有试题涉及几个函数性质的综合考查,比如2020年全国卷Ⅰ第12题、2017年江苏卷第11题、2015年全国卷Ⅱ文第12题.其中一些函数的性质通常是隐含的,需要考生自己去挖掘,典型的情况是函数的奇偶性与单调性的综合情形,因此从这个意义上来说,例 2 相对比较简单.(事实上,2015 年全国卷Ⅰ理第 13 题为"若函数 $f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)$ 为偶函数,则 $a=$______";读者容易看出,该题与本题完全类似,都是两个奇函数之积的形式.)注意到 $g(x)=x^3(x\in\mathbf{R})$ 是奇函数,而我们已知函数 $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$ 是偶函数,则必有 $h(x)=a\cdot 2^x-2^{-x}$ 在同一定义域上是奇函数,于是奇函数 $h(x)$ 在 $x=0$ 处有意义时,必有 $h(0)=0$,故可得 $a=1$.与本题密切相关的教材问题有:

问题 1 (苏教 2020 版必修第一册[4] 第 155 页第 15 题)设 m 为实数,已知函数 $f(x)=1-\dfrac{m}{5^x+1}$ 是奇函数.(1)求 m 的值;(2)(3)略.

2021 年全国卷Ⅰ中考查函数性质的试题还有一处,就是试卷最后一题第 22 题第(2)问:已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$,(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;(2)设 a,b 为两个不相等的实数,且 $b\ln a-a\ln b=a-b$,证明:$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<\mathrm{e}$.

命题要害剖析与简解 (1)从略.(2)的解题核心变化过程为:题意隐含 $a,b>0$,由已知 a,b 为两个不相等的实数,且 $b\ln a-a\ln b=a-b$ 得 $\dfrac{\ln a}{a}-\dfrac{\ln b}{b}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}$,即$\dfrac{1+\ln a}{a}=\dfrac{1+\ln b}{b}$,由于实数 a,b 的对称性及 $a\neq b$,不妨设 $0<a<b$,令正数 $m=\dfrac{1}{a}$,$n=\dfrac{1}{b}$,即得 $m(1-\ln m)=n(1-\ln n)$,也就是 $f(m)=f(n)$,问题即变为要证 $2<m+n<\mathrm{e}$,再结合(1)的单调性结论,可知 m,n 不在同一单调区间,即可设 $0<n<1<m$.完成了这些基础工作,后面稍作转化,即可变为传统的单调性问题研究了(余略).上面通过恒等变换构建同型函数这个技巧是至关重要的,2020 年全国卷Ⅰ第 12 题也是这样突破的,可见函数的性质一直是高考考查的一个重要内容,值得重视.

例 3 (2021 年全国卷Ⅰ第 19 题)记△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $b^2=ac$,点 D 在边 AC 上,$BD\sin\angle ABC=a\sin C$.(1)证明:$BD=b$;(2)若 $AD=2DC$,求 $\cos\angle ABC$.

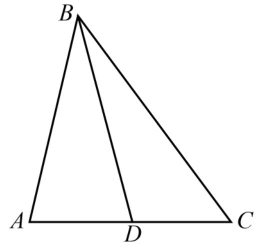
图 1

命题要害剖析与简解 我们不妨将这种由一个顶点(比如点 B)和其对边上一点(如点 D)连结起来的三角形称为"λ 型三角形".很显然,我们熟知的三角形中线长问题、内角平分线定理都是这类以 λ 型三角形为背景的问题.这类题目的破解关键就在用好联系三角形△ABD 及△BCD 的桥梁——边 BD 及互补角 $\angle BDA$ 与 $\angle BDC$(这两个角的正弦相等,从而可以联系正弦定理,同时这两个角的余弦互为相反数,又可联系余弦定理),于是本题可简证如下:

(1)由 $BD\sin\angle ABC=a\sin C$ 得 $\dfrac{BD}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin\angle ABC}$,由正弦定理有$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin\angle ABC}$,两式相比得$\dfrac{BD}{c}=\dfrac{a}{b}$,已知 $b^2=ac$,代入得 $BD=\dfrac{b^2}{b}=b$.

(2)由(1)得 $BD=b$,又 $AD=2DC$,不妨记 $DC=t>0$,则有 $AD=2t$,$BD=b=3t$,再记 $\angle BDA=\theta$,分别在△BDA 与△BDC 中运用余弦定理,得 $c^2=(3t)^2+(2t)^2-2\cdot 3t\cdot 2t\cos\theta$ 及 $a^2=(3t)^2+t^2+2\cdot 3t\cdot t\cos\theta$,又由 $b^2=ac$,即 $ac=9t^2$,联立消去 a,c,得 $(9t^2)^2=(13t^2-12t^2\cdot\cos\theta)(10t^2+6t^2\cos\theta)$,即 $81=(13-12\cos\theta)(10+6\cos\theta)$,化简易解得 $\cos\theta=\dfrac{7}{12}$ 或 $-\dfrac{7}{6}$(舍去),于是进一步得 $c^2=6t^2$,$a^2=\dfrac{27}{2}t^2$,则 $\cos\angle ABC=$

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\frac{27}{2}t^2+6t^2-9t^2}{2\times 9t^2}=\frac{7}{12}.$$

评注 数学核心素养的"数学抽象"水平要

求学生能将已知命题推广到更一般的情形中[4]．此类问题的一般情形称为斯台沃特定理．与此题密切相关的教材问题有：

问题 1　(苏教 2020 版必修第二册[4] 第 88 页例 6)AM 是$\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线(图略)，求证：$AM=\frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2+AC^2)-BC^2}$．(人教版必修第二册第 53 页第 15 题及人教版选择性必修第一册第 79 页第 12 题也是完全类似的问题)

问题 2　(苏教 2020 版必修第二册[4] 第 93 页例 5)在$\triangle ABC$ 中，AD 是角$\angle BAC$ 的角平分线(图略)，求证：$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$．

例 4　(2021 年全国卷 Ⅰ 第 21 题)在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F_1\left(-\sqrt{17},0\right)$，$F_2\left(\sqrt{17},0\right)$，点 M 满足 $|MF_1|-|MF_2|=2$，记 M 的轨迹为 C．(1)求 C 的方程；(2)设点 T 在直线 $x=\frac{1}{2}$ 上，过 T 的两条直线分别交 C 于 A，B 两点和 P，Q 两点，且 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和．

命题要害剖析与简解　很多年来，圆锥曲线解答题多以直线与椭圆相交背景为主，今年终于有所创新，变成了双曲线背景的问题，准确地说，是单支双曲线：由于 $|MF_1|-|MF_2|=2>0$，即 $|MF_1|>|MF_2|$，所以由双曲线定义知，动点距离 $F_1\left(-\sqrt{17},0\right)$ 较远，即轨道为双曲线的右支．其他方面的解题要害，如一元二次方程根与系数关系、弦长公式等都是比较基本的，没有什么思维上的障碍，简解如下：

(1)由题意可知 M 的轨迹为焦点在 x 轴上的标准双曲线的右支，且 $c=\sqrt{17}$，$2a=2$，即 $a=1$，于是 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{17-1}=4$，即 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{16}=1(x\geqslant 1)$．

(2)由题意，设直线 AB 的斜率为 k_1，直线 PQ 的斜率为 k_2，且 $k_1\neq k_2$，记 $T\left(\frac{1}{2},t\right)$，则直线 AB 及 PQ 的方程可以统一记为 $y-t=k_i\left(x-\frac{1}{2}\right)$ $(i=1,2)$，将其代入 $x^2-\frac{y^2}{16}=1(x\geqslant 1)$，化简得 $(16-k_i^2)x^2+(k_i^2-2k_it)x-\left(\frac{1}{4}k_i^2+t^2-k_it+16\right)=0$，由题意 $16-k_i^2\neq 0$，于是 $x_{i1}+x_{i2}=-\frac{k_i^2-2k_it}{16-k_i^2}$，$x_{i1}x_{i2}=\frac{-\left(\frac{1}{4}k_i^2+t^2-k_it+16\right)}{16-k_i^2}$．设 A，B 两点的横坐标分别为 x_{11}，x_{12}，设 P，Q 两点的横坐标分别为 x_{21}，x_{22}．由圆锥曲线的弦长公式知 $|TA|=\sqrt{1+k_1^2}\left|x_{11}-\frac{1}{2}\right|$，同理有 $|TB|=\sqrt{1+k_1^2}\left|x_{12}-\frac{1}{2}\right|$，于是 $|TA|\cdot|TB|=(1+k_1^2)\left(x_{11}-\frac{1}{2}\right)\left(x_{12}-\frac{1}{2}\right)$，利用韦达定理，可将 $\left(x_{11}-\frac{1}{2}\right)\left(x_{12}-\frac{1}{2}\right)$ 化简为$\frac{t^2+12}{k_1^2-16}$，即 $|TA|\cdot|TB|=\frac{1+k_1^2}{k_1^2-16}\cdot(t^2+12)$(*)．

由几何结构关系的对称性，将(*)式中的下标 1 改为 2，可得 $|TP|\cdot|TQ|=\frac{1+k_2^2}{k_2^2-16}\cdot(t^2+12)$，结合已知条件 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，得$\frac{1+k_1^2}{k_1^2-16}\cdot(t^2+12)=\frac{1+k_2^2}{k_2^2-16}\cdot(t^2+12)$，注意到 $t\in\mathbf{R}$，故 $t^2+12>0$，进而$\frac{1+k_1^2}{k_1^2-16}=\frac{1+k_2^2}{k_2^2-16}$，即 $1+\frac{17}{k_1^2-16}=1+\frac{17}{k_2^2-16}$，易得 $k_1^2-k_2^2=0$，而 $k_1\neq k_2$，所以 $k_1+k_2=0$．

评注　对这道题的第(2)问，这里还是采用了大多数考生常用的直角坐标系求解的思路，未采用直线的参数方程办法，化简工作量不小，上面已经充分注意到几何结构关系的对称(注意：这种对称不是我们传统意义上的镜面对称)特征，简化了书写过程，依然较繁．类似问题如下：

问题 1　(人教 2019A 版选择性必修第一册[1] 第 120 页例 2)已知 A，B 两地相距 800 m，在 A 地听到炮弹爆炸声比在 B 地晚 2 s，且声速为 340 m/s，求炮弹爆炸点的轨迹方程．

综上所述，我们能够体会到命题人的初心就是希望师生回归课本．事实上，像这样关涉到教材典型例题的高考真题，除了上面提到的，还有很多．如第 10 题引入教材中的两角和与差的三角函数的典型情境、第 16 题的第二空其实就是错位相

减法的应用,这些知识在教材中都有明显的展示.限于篇幅,感兴趣的读者可自行对照研究.

参考文献

[1] 章建跃,李增沪.普通高中教科书数学必修第一册[M].北京:人民教育出版社,2019.
[2] 单墫,李善良.普通高中教科书数学必修第一册[M].南京:江苏凤凰教育出版社,2020.
[3] 王尚志,保继光.普通高中教科书数学必修第二册[M].北京:北京师范大学出版社,2019.
[4] 单墫,李善良.普通高中教科书数学必修第二册[M].南京:江苏凤凰教育出版社,2020.
[5] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版)[M].北京:人民教育出版社,2018:100.

(上接第 14 页)

2.2 促进学生深度学习

说题能挖掘学生潜力,培养其思维能力.说题教学使学生在师生交流中各抒己见、互献智慧,在磨炼中探索、尝试和验证,进行思维方式的沟通,以达到集思广益和突破创新的目的,培养学生思维的深刻性、广阔性、创造性乃至批判性,深入挖掘学生的潜在能力,促进学生深度学习.说题,让教与学更有深度.

2.3 培养数学交流技能

数学作为一种科学语言已被用于人类社会的几乎所有领域.因此,数学交流也就成为现代公民的一种基本技能.由于数学知识、方法、推理等都是用数学语言表述的,在说题过程中,学生经历了数学语言与自然语言之间的翻译转换,能运用数学语言正确、迅速、规范地表达解题过程,用数学概念、原理及思想方法解释一些自然和社会现象等等.[5] 逻辑严密、语言严谨,在有效促进数学理解的同时,推进数学交流技能的形成和发展,学会用数学的思维思考问题、用数学的语言表达世界,是提升中学生能力、发展核心素养的“润滑油”和“催化剂”.说题,让教与学更加生动.

2.4 全面增强学习自信

说题为学生搭建了展示自我的平台,学生在说题中能充分展示自我,并提高学习兴趣和学习效率.学生由被动学习变为主动学习、主动参与,体现了其主体地位,每个学生都有展示才华的机会,使学生在良好的教学情境中以最佳心理状态和思维状态学习交流,不仅提升思维能力、表达能力,更是增强了学习自信.说题,让教与学更加温暖.

说题是把以学生为本的理念具体化,是教育教学实践中提炼出来的一种新型双边教学模式,是探讨解题方法、提炼数学思想、探寻总结解题规律、提高分析问题和解决问题能力、优化思维品质的重要举措,具有很强的可操作性.它是学生摆脱题海战术,培养良好的数学素养及语言表达能力,充分暴露解题思维的过程,有利于学生良好思维品质的养成和核心素养的提高.

参考文献

[1] 洪梦,吴立宝,王富英.数学说题的内涵与结构[J].数学通报,2020,59(11):58-63.
[2] 吴增生.数学思想方法及其教学策略探析[J].数学教育学报,2014,23(3):11-15.
[3] 波利亚.怎样解题[M].上海:上海科技教育出版社,2011:3-4.
[4] 唐恒钧,张维忠.数学问题链教学的理论与实践[M].上海:华东师范大学出版社,2021:74-75.
[5] 鲍建生,周超.数学学习的心理基础与过程[M].上海:上海教育出版社,2009:156.

21 世纪以来的新课程改革中,又有“重走科学家发现之路”的说法,要求“充分”放手让学生探索.然而,即使是科学教育的过程也绝不等同于科学家在实验室中科学实验过程的重演……我们要做的事情是在教师的指导下,有计划地投入一定的“时间”成本,进行适度的探索和“发现”的数学活动,经历一些比较完整的认识过程.

——张奠宙,于波.数学教育的“中国道路”[M].上海:上海教育出版社,2013:121.