

以高考试题为载体开展主题教学的探索与思考

刘宏英 广东省惠州市第一中学 (516001)

高中阶段直线与圆锥曲线问题涉及的概念、公式较多,对数学抽象、逻辑推理、数学建模、数学运算等核心素养的要求较高,而且需要综合运用数形结合、函数与方程等数学思想方法,因此成为教学的难点.怎样教才有利于学生素养的提升?《普通高中数学课程标准(2017年版)》提出以重要的数学概念或核心数学知识、数学思想方法、数学学科核心素养为主线组织学习主题,开展主题教学.

高考试题经历了反复推敲研磨,是众多专家学者智慧的结晶,是检验学生核心素养水平的重要标准,是培养学生核心素养的优质素材.以新课标为指导,笔者以高考试题为载体进行以“一个圆锥曲线切线性质的探究”为主题的教学探索,希望能对教师突破圆锥曲线教学困境有所启发.

1 呈现考题

例1 已知抛物线 $E: x^2 = 4y$, 设动直线 l 与抛物线 E 相切于点 P , 与直线 $y = -1$ 相交于点 Q . 证明: 以 PQ 为直径的圆恒过 y 轴上某定点.

评析 运动不变性是圆锥曲线中一个非常重要的性质,解决这类问题除了正确运用通性通法,还需要适度的计算技巧,并借助几何性质和数形结合、等价转化等数学思想,对六个核心素养进行综合考查.例1来自2012年高考福建卷的第二问,需要探究一个问题——当直线与圆锥曲线相切时,与切线有关的线段为直径的圆过定点.2017、2018、2019年每年都考查了圆锥曲线背景下的定点或定值问题,因此根据本题条件的特点,将本节课的学习主题定为“一个圆锥曲线切线性质的探究”.

2 组织探究

例1涉及的圆锥曲线方程较简单,而且要探究的结论以证明的形式给出,思维起点较低.因此教学中,引导学生以小组为单位先独立思考,再合作交流,最后推选一名同学展示本组的解答过程.教师巡视学生完成情况,对教学生提出的问题给予指导.

学生展示本组例1的解答过程:

解法1 设切线方程为 $y = kx + b (k \neq 0)$,
抛物线的焦点为 $F(0, 1)$,

$$\text{联立方程} \begin{cases} y = kx + b, \\ x^2 = 4y, \end{cases}$$

$$\text{得 } x^2 - 4kx - 4b = 0,$$

$$\text{由 } \Delta = 16k^2 + 16b = 0, \text{ 得 } b = -k^2,$$

并解得点 P 的坐标为 $(2k, k^2)$,

$$\text{联立方程} \begin{cases} y = kx + b, \\ y = -1, \end{cases}$$

$$\text{得点 } Q \text{ 的坐标为 } \left(\frac{-1-b}{k}, -1 \right),$$

$$\text{设点 } M(0, y_0),$$

若以 PQ 为直径的圆恒过 M ,

$$\text{则 } \overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{MP} = 0.$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{MQ} = \left(\frac{-1-b}{k}, -1-y_0 \right),$$

$$\overrightarrow{MP} = (2k, k^2 - y_0),$$

$$\text{代入 } \overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{MP} = 0,$$

$$\text{得 } 2(-1-b) - k^2 - k^2 y_0 + y_0 + y_0^2 = 0,$$

将 $b = -k^2$ 代入,

$$\text{得 } (1-y_0)k^2 + y_0 + y_0^2 - 2 = 0,$$

此式恒成立,故 $y_0 = 1$.

$\therefore$ 以 PQ 为直径的圆恒过 y 轴上定点 $M(0, 1)$.

解法2 设点 $P(x_0, y_0)$, $x_0 \neq 0$.

$$\because y = \frac{1}{4}x^2, \therefore y' = \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore \text{切线方程为 } y - y_0 = \frac{1}{2}x_0(x - x_0),$$

$$\text{即 } y = \frac{1}{2}x_0x - \frac{1}{4}x_0^2.$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x_0x - \frac{1}{4}x_0^2, \\ y = -1, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = \frac{x_0^2 - 4}{2x_0}, \\ y = -1, \end{cases}$$

$$\therefore Q\left(\frac{x_0^2 - 4}{2x_0}, -1\right). \text{ 设 } M(0, y_1),$$

$$\text{得 } \overrightarrow{MP} = (x_0, y_0 - y_1),$$

$$\overrightarrow{MQ} = \left(\frac{x_0^2 - 4}{2x_0}, -1 - y_1 \right).$$

若以 PQ 为直径的圆恒过点 M ,

$$\text{则 } \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0,$$

$$\text{得 } x_0 \frac{x_0^2 - 4}{2x_0} + (y_0 - y_1)(-1 - y_1) = 0,$$

$$\text{即 } \frac{x_0^2}{2} - y_0 - y_0 y_1 + y_1 + y_1^2 - 2 = 0.$$

$$\therefore y_0 = \frac{1}{4}x_0^2 (x_0 \neq 0),$$

$$\therefore (1 - y_1)y_0 + y_1 + y_1^2 - 2 = 0 \text{ 恒成立.}$$

此等式的成立与 y_0 无关,

$$\text{所以 } \begin{cases} 1 - y_1 = 0, \\ y_1 + y_1^2 - 2 = 0, \end{cases} \text{ 解得 } y_1 = 1.$$

$\therefore$ 以 PQ 为直径的圆恒过 y 轴上定点 $M(0, 1)$.

当学生解答完例 1 之后, 教师提出下列问题:

问题 1 解决直线与抛物线相交问题的常见方法有哪些?

问题 2 本题中的直线是抛物线的切线, 怎样求抛物线的切线方程?

问题 3 遇到与圆的直径有关的问题, 通常怎样计算?

问题 4 你能从本题得到与抛物线的切线有关的性质吗?

评析 通过问题 1 巩固直线与圆锥曲线相交问题的一般方法, 即联立直线和曲线方程, 借助判别式和韦达定理建立变量之间的不等或相等关系. 通过问题 2 提升学生思维的灵活性, 即针对特殊情况——开口向上的抛物线, 可运用导数法求切线方程, 使学生认识到圆锥曲线的切线与导数的相关性, 加强不同知识板块之间的联系. 通过问题 3 引导学生借助几何性质优化代数运算. 通过问题 4, 提升数学抽象、数学建模素养. 引导学生发现题中的三个特殊点——切点 P , 切线与准线的交点 Q , 焦点 F , 三个点之间的关系——以 PQ 为直径的圆恒过抛物线的焦点.

问题 5 本题中抛物线的焦点在 y 轴正半轴, 假如焦点在 y 轴的负半轴, 你能根据例题改编出一道与例 1 结论一样的练习吗? 试一试. 如果焦点在 x 轴正半轴, 负半轴, 结论又有什么变化?

引导学生得出例 1 的以下变式:

(1) 已知抛物线 $E: x^2 = -4y$, 设动直线 l 与抛物线 E 相切于点 P , 与直线 $y=1$ 相交于点 Q . 证明: 以 PQ 为直径的圆恒过 y 轴上某定点. (定点为 $(0, -1)$)

(2) 已知抛物线 $E: y^2 = 4x$, 设动直线 l 与抛物线 E 相切于点 P , 与直线 $x=-1$ 相交于点 Q . 证明: 以 PQ 为直径的圆恒过 x 轴上某定点. (定点为 $(1, 0)$)

(3) 已知抛物线 $E: y^2 = -4x$, 设动直线 l 与抛物线 E 相切于点 P , 与直线 $x=1$ 相交于点 Q . 证明: 以 PQ 为直径的圆恒过 x 轴上某定点. (定点为 $(-1, 0)$)

问题 6 你能从例 1 和变式 (1) (2) (3) 中提炼出关于抛物线切线的一个性质吗? 以命题的形式写出来, 并加以证明.

评析 通过问题 5 和 6, 引导学生自编练习加深对几何关系的理解, 提高数形结合的意识, 并激励学生挑战新的思维障碍——如何用导数法求焦点在 x 轴上的抛物线的切线方程, 进而加深对函数概念的理解. 除了解决具体的问题, 学生还经历特殊到一般、先猜后证等科学研究的常用方法.

3 迁移深化

完成例 1 及 6 个问题之后, 启发学生思考: 在学习圆锥曲线的课本知识时, 发现三种曲线有许多性质有相似之处, 如果把例 1 中的抛物线换成椭圆, 会得到什么结果? 接下来呈现第 2 道高考试题:

例 2 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 动直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 E 有且只有一个公共点 P , 且与直线 $x=4$ 相交于点 Q . 试探究: 在坐标平面内是否存在定点 M , 使得以 PQ 为直径的圆恒过点 M ? 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 说明理由.

引导学生对比例 2 与例 1 条件的异同, 曲线由抛物线变成椭圆, 其他都没变! 但所过定点未给出, 将条件与例 1 对比, 发现点 P 是切点, 点 Q 是切线与准线的交点, 于是猜想以 PQ 为直径的圆恒过椭圆的焦点, 故定点就是右焦点!

那么该怎么计算, 怎么来证明猜想呢? 仍然组织学生以小组为单位, 先独立思考, 再合作交流, 最后推选一名同学展示本组的解答过程. 教师则巡视学生完成情况, 对学生提出的问题给予指导. 有了例 1 的解题经验, 学生立即积极演算起来. 与例 1 相比, 例 2 的运算量变大, 对数学运算素养的要求更高.

学生展示本组例 2 的解答过程: (解答过程略)

解题完成之后,继续提问:

问题 7 如果椭圆的焦点在 y 轴上,会得到什么结论? 仿照例 1 的练习,你能编写一道练习吗?

问题 8 你能从例 2 和变式中提炼出关于椭圆切线的一个性质吗? 以命题的形式写出来.

评析 借助问题 7 和问题 8 引导学生编写出与例 1 相似的变式,为规律的显现作铺垫,得到探究的结论 2——直线与椭圆相切,且与准线交于一点,则以这两点之间的线段为直径的圆必过椭圆相应的焦点.

4 拓展生成

问题 9 通过例 1、例 2 的探究,两题的问题背景、解题思路、方法、结论高度一致,抛物线、椭圆的切线都有的这个性质,双曲线有吗? 尝试编写一道类似的例题并加以证明.

问题 10 回顾本节课的学习内容,你发现圆锥曲线的切线有什么特点?

评析 问题 9 和问题 10 引导学生编写出双曲线背景下的类似习题,为揭示本节课例题和变式蕴含的一般性规律作铺垫,最终引导学生得出本节课的学习成果——所探究的“一个圆锥曲线切线性质”是什么? 结论为——如果直线与圆锥曲线相切于点 P , 并与准线相交于点 Q , 则以 PQ 为直径的圆过圆锥曲线相应的焦点.

5 两点思考

5.1 以学定教,发展核心素养

新课程背景下,课堂教学改革的重点是教与学关系的转变,引导学生学会自主学习和自我教育是教学的根本任务. 大部分教师进行圆锥曲线教学是自己示范,学生模仿,所以教师讲得好并没有转化成学生学得好. 本节课教师选取内在逻辑关系密切的内容作为学习主题,设计低起点高发展的数学问题,引导学生解决问题和提出新问题;学生通过独立思考、合作交流、数学表达,激发出学习潜能,经历由浅入深、由表及里的思维发展全过程,各个素养都得到了较好的发展. 相比重复训练,这种学习方式效率更高,以往花两三节课讲解学生还似懂非懂的问题,现在一节课就理清了思路. 阿基米德说过,“给我一个支点,我可以撬动地球.”数学的基本概念、基本方法就是这个“支点”,学生数学学习的障碍也主要源于这个支点不牢. 近年高考试题就有许多利于夯实基本概念、基本方法的优质主题

教学素材,例如 2019 全国Ⅲ卷理科第 18 题“根据茎叶图判断哪种生产方式的效率更高”、2019 全国Ⅱ卷理科第 16 题“南北朝时期的官员独孤信的印信问题”、2018 全国Ⅰ卷文科第 11 题“三角函数基本概念”. 以这些试题为源头,由教师甚至是让学生自己设计题组,把学过的知识、做过的习题纵横联系构建学习主题,对发展核心素养非常有利.

5.2 以问导学,推动深度学习

教师根据学习内容和学生已有认知,提出好的问题,是实现核心素养形成的有效策略. 根据维果茨基的最近发展区理论,这节课借助问题串层层递进不断地创造最近发展区,通过析题、解题、编题,最终形成命题,使学生在不同的情境下经历数学抽象、数学建模的过程. 通过改变焦点位置、改变圆锥曲线类型,多角度、多层次提升数学抽象、数学建模、数学运算的难度,提升学生数学核心素养的发展水平. 在本节课的基础上,顺势抛出近年高考的相似试题,鼓励学生向“圆锥曲线运动不变性”这一更深层次的主题学习迈进.

(1) (2019 年高考全国Ⅲ卷·理 21) 已知曲线 $C: y = \frac{x^2}{2}$, D 为直线 $y = -\frac{1}{2}$ 上的动点,过 D 作 C 的两条切线,切点分别为 A, B . 证明: 直线 AB 过定点.

(2) (2017 年高考全国Ⅲ卷·理 20) 已知抛物线 $C: y^2 = 2x$, 过点 $(2, 0)$ 的直线 l 交 C 于 A, B 两点,圆 M 是以线段 AB 为直径的圆. 证明: 坐标原点 O 在圆 M 上.

(3) (2018 年高考浙江卷·21) 如图 1, 已知点 P 是 y 轴左侧 (不含 y 轴) 一点, 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上存在不同的两点 A, B 满足 PA, PB 的中点均在 C 上. 设 AB 中点为 M , 证明: PM 垂直于 y 轴.

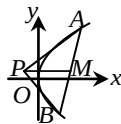


图 1

三道试题都呈现出圆锥曲线的运动不变性,背景都是抛物线. 在解题思路与本节课有联系也有区别,并且也可以拓展出与之相对应的椭圆、双曲线的命题,对推动深度学习十分有利.

新数学课程标准在实施建议中提出“既要重视教,更要重视学,促进学生学会学习”. 除了高考

试题,还可以挖掘更多的教学素材,设计更丰富的学科活动开展主题教学,但最终目的都应该为学生的学服务,帮助学生理解概念、把握本质、明晰算理等,真正实现数学核心素养的形成和发展.

(本文系广东省教育研究院中小学数学教学研究专项课题《核心素养视角下的高中数学函数教学研究》(立项编号:GDJY-2020-A-s116),惠州市教育科研课题《数学学科工作室践行“高效课堂”的实践与研究》(课题编号:2017hzkt177)的阶段性成果)

借题发挥,提升学生数据分析核心素养

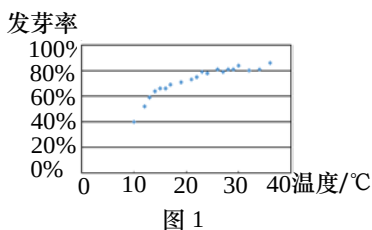
林平¹ 李杰聪²

1 福建师范大学数学与统计学院 (350100) 2 福建省龙海第二中学 (363100)

《普通高中数学课程标准(2017年版)》(以下简称“课标”)将“数据分析”作为高中数学课程目标中培养学生所必备的六个数学学科核心素养之一^[1].要实现这一培养目标,除了相关课程内容实施过程的渗透,还可以从各类习题出发.深入探究,引导学生融会贯通,帮助学生提升数据分析素养.笔者通过对2020年全国卷I理科第5题的分析与拓展,举例阐述教学中的借题发挥.

1 考题简析

(2020年高考全国I卷·理5)某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率 y 和温度 x (单位:°C)的关系,在20个不同的温度条件下进行种子发芽实验,由实验数据 $(x_i, y_i)(i=1, 2, \dots, 20)$ 得到下图1的散点图.



由此散点图,在10°C到40°C之间,下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是().

- A. $y = ax + b$ B. $y = a + bx^2$
C. $y = a + be^x$ D. $y = a + b \ln x$

此题考查学生对初等函数图象的掌握情况.学生刚开始学习基本初等函数时,一般经历从具体函数表达得到函数图象,再根据函数图象,归纳探究函数的单调性、奇偶性、最大(小)值等性质.此题反其道而行,要求学生根据散点图所呈现的趋

势,判断与所学的哪些初等函数图象相似.这其实是数据拟合的前期工作.当然,如果“就题论题”,考生运用排除法就能选出D选项,本文不再赘述.

2 深入挖掘,了解一元线性回归模型的广泛应用

课标中必修课程统计内容对于一元线性回归模型的要求:针对实际问题,会用一元线性回归模型进行预测^[1].4个选项中的回归方程类型不一定是线性的,但最终都能转化为一元线性回归模型进行加以解决.在 $y = ax + b$ 中, y 关于 x 是线性的;在 $y = a + bx^2$ 中, y 关于 x^2 是线性的;在 $y = a + be^x$ 中, y 关于 e^x 是线性的;在 $y = a + b \ln x$ 中, y 关于 $\ln x$ 是线性的.因此,若根据最小二乘准则求回归模型的系数,要对所给每个数对 (x_i, y_i) 分别做以下处理 (x_i, y_i) , (x_i^2, y_i) , (e^{x_i}, y_i) , $(\ln x_i, y_i)$,化归转化为求一元线性回归模型 $y = ax + b$ 的参数 a, b 的问题.

3 关于“最适宜”的理解

若舍去客观题提供的备选项,从散点图呈现的趋势来看,可以认为样本点分布在某多项式函数曲线(2次多项式,3次多项式,..., n 次多项式...)附近,至少基于学生已有的知识,可视为分布在某二次曲线 $y = ax^2 + bx + c$ (这3个参数的正负情况必须是 $a < 0$, $b > 0$, $c \neq 0$)附近;还可视为样本点分布在幂函数曲线 $y = ax^b$ (这2个参数的正负情况是 $a > 0$, $0 < b < 1$)附近.

“最适宜”含有一定的主观成分,学生由经验确定回归方程的类型.根据所学初等函数及其图象,至少可以有以下3种回归方程的类型选择: $y = ax^2 + bx + c$, $y = ax^b$, $y = a + b \ln x$.而后需要考虑回归模型的参数求解.若用方程 $y = ax^2 + bx + c$ 的曲