"同构法"巧解不等式问题

杨瑞强

（黄石市第一中学　湖北　黄石　435000）

摘　要：“同构法”巧解不等式问题是对原不等式同解变形，把不等式转化为左右两边是相同结构的式子，根据“相同结构”构造辅助函数，巧妙利用函数单调性解题.

关键词：同构法；不等式；单调性

把一个等式或不等式通过变形，使左右两边结构形式完全相同，可构造函数，利用函数的单调性进行处理，找这个函数模型的方法就是同构法. 例如若 $F(x)\geqslant 0$ 能等价变形为 $f[g(x)]\geqslant f[h(x)]$，然后利用 $f(x)$ 的单调性（如递增），再转化为 $g(x)\geqslant h(x)$.

1　利用同构法巧解不等式

例题1　不等式 $(x^2-1)^{1011}+x^{2022}+2x^2-1\leqslant 0$ 的解集为______.

解析　不等式可变形为 $(x^2-1)^{1011}+x^2-1+(x^2)^{1011}+x^2\leqslant 0$，$(x^2)^{1011}+x^2\leqslant(1-x^2)^{1011}+1-x^2$.

设 $f(x)=x^{1011}+x$，$f(x^2)\leqslant f(1-x^2)$，显然 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $x^2\leqslant 1-x^2$，解得 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故不等式的解集为 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

评析　本题主要考查构造函数法解不等式，合理构造函数是解题的关键，利用复合函数（或导数法）确定新函数的单调性，不等式转化为新函数的不等式，从而易求解.

2　利用同构法巧解双变量不等式问题

例题2　已知函数 $f(x)=\cos x\,(x\in[0,\pi])$，若 $\forall x_1,x_2\in[0,\pi]$，$x_1\neq x_2$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<k|x_1-x_2|$，则实数 k 的最小值是______.

解析　不妨设 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant\pi$，因为 $f(x)=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，则 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以 $|f(x_1)-f(x_2)|<k|x_1-x_2|$.

即 $f(x_1)-f(x_2)<k|x_1-x_2|<kx_2-kx_1$.

即 $f(x_1)+kx_1<f(x_2)+kx_2$.

记 $g(x)=f(x)+kx=\cos x+kx$，则 $g(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上单调递增，所以 $g'(x)=k-\sin x\geqslant 0$ 在 $[0,\pi]$ 上恒成立.

所以 $k\geqslant(\sin x)_{\max}=1$，故 k 的最小值为1.

评析　含有地位同等的两个变量 x_1,x_2 或 x,y 的等式或不等式，如果进行整理（即同构）后，等式或不等式两边具有结构的一致性，往往暗示应构造函数，应用单调性解决.

含有二元变量的函数，常见的同构类型有：

①$f(x_1)-f(x_2)>\lambda[g(x_2)-g(x_1)]\Leftrightarrow f(x_1)+\lambda g(x_1)>f(x_2)+\lambda g(x_2)$，构造函数 $h(x)=f(x)+\lambda g(x)$；

②$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>k\,(x_1<x_2)\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)<k(x_1-x_2)$，构造函数 $h(x)=f(x)-kx$；

作者简介：杨瑞强（1979－），男，湖北黄冈人，本科，中学高级教师，研究方向：中学数学教学.

学思想除了上述提到的数形结合思想、方程思想、比较思想，还有分类讨论思想、化归与转化思想等. 在解题过程中，灵活应用数学思想可以提高数学解题能力，架构良好的数学认知结构，更加清晰地进行逻辑推理，进而培养学生数学素养，形成良好的思维品质.

参考文献：

[1]李晶，孙雪梅，李德安. 一题之探——以数形结合思想为例[J]. 数学通报，2019，58(04)：60－63.

[2]杨孝斌，周国利，周娅. 两道“解三角形”高考题的解法研究、比较分析及教学启示——以全国Ⅲ卷理科数学2017年第17题、2019年第18题为例[J]. 兴义民族师范学院学报，2020(01)：112－116＋124.

（收稿日期：2021－09－11）

③$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>\frac{k}{x_1x_2}(x_1<x_2)\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)<k(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1})$，构造函数 $h(x)=f(x)+\frac{k}{x}$.

3 利用同构法巧解不等式恒成立问题

3.1 积型 $ae^a\leqslant b\ln b$ 同构

例题3 若对任意的实数 $x\geqslant1$，不等式 $e^{kx}-\frac{\ln x}{k}\geqslant0$ 恒成立，则正数 k 的取值范围是______.

解析 因为 $x\geqslant1,k>0$，所以 $e^{kx}-\frac{\ln x}{k}\geqslant0$.

所以 $ke^{kx}\geqslant\ln x$. 所以 $(kx)e^{kx}\geqslant x\ln x$.

方法1 （构造同左 $ae^a\leqslant(\ln b)e^{\ln b}$ 形式）$(kx)e^{kx}\geqslant x\ln x\Leftrightarrow(kx)e^{kx}\geqslant(\ln x)e^{\ln x}$.

令 $f(t)=te^t,t\geqslant0,f'(t)=(t+1)e^t>0$，即 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

则 $\forall x\geqslant1,e^{kx}-\frac{\ln x}{k}\geqslant0\Leftrightarrow f(kx)\geqslant f(\ln x)\Leftrightarrow kx\geqslant\ln x\Leftrightarrow k\geqslant\frac{\ln x}{x}$.

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x},x\geqslant1$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. 当 $1<x<e$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>e$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $x=e$ 时，$g(x)_{\max}=\frac{1}{e}$，即 $k\geqslant\frac{1}{e}$.

故正数 k 的取值范围是 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

方法2 （构造同右 $e^a\ln e^a\leqslant b\ln b$ 形式）$(kx)e^{kx}\geqslant x\ln x\Leftrightarrow e^{kx}\ln e^{kx}\geqslant x\ln x$.

令 $f(x)=t\ln t,t\geqslant1$，则 $f'(t)=1+\ln t>0$，即 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增.

则 $\forall x\geqslant1,e^{kx}-\frac{\ln x}{k}\geqslant0\Leftrightarrow f(e^{kx})\geqslant f(x)\Leftrightarrow e^{kx}\geqslant x\Leftrightarrow k\geqslant\frac{\ln x}{x}$. 下同解法1.

方法3 （取对数 $a+\ln a\leqslant\ln b+\ln(\ln b)$ 形式）$(kx)e^{kx}\geqslant x\ln x\Leftrightarrow kx+\ln(kx)\geqslant\ln x+\ln(\ln x)$.

令 $f(x)=t+\ln t,t>0$，则 $f'(x)=1+\frac{1}{t}>0$，即 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

则 $\forall x\geqslant1,e^{kx}-\frac{\ln x}{k}\geqslant0\Leftrightarrow f(kx)\geqslant f(\ln x)\Leftrightarrow kx\geqslant\ln x\Leftrightarrow k\geqslant\frac{\ln x}{x}$. 下同解法1.

评析 三种同构途径：①同左 $ae^a\leqslant(\ln b)e^{\ln b}$，构造函数 $f(x)=xe^x$；②同右 $e^a\ln e^a\leqslant b\ln b$，构造函数 $f(x)=x\ln x$；③取对数 $a+\ln a\leqslant\ln b+\ln(\ln b)$，构造函数 $f(x)=x+\ln x$. 为了实现不等式两边“结构”相同的目的，需要对已知的指对式进行“改头换面”，常见的同构变形有：$x=e^{\ln x}=\ln e^x$，$x\ln x=e^{\ln x}\cdot\ln x$，$xe^x=e^{\ln x+x}=e^x\cdot\ln e^x$，$\frac{e^x}{x}=e^{x-\ln x}$ 等.

3.2 商型 $\frac{e^a}{a}\leqslant\frac{b}{\ln b}$（或 $\frac{a}{e^a}\leqslant\frac{\ln b}{b}$）同构

例题4 若对任意的实数 $0<x<1$，不等式 $\frac{a\ln x}{x}<\frac{x+\ln a}{e^x}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是______.

解析 由已知可得 $a>0$.

当 $a\geqslant1$ 时，不等式左边小于0，右边大于0，不等式显然成立.

当 $0<a<1$ 时，$\frac{a\ln x}{x}<\frac{x+\ln a}{e^x}\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}<\frac{x+\ln a}{ae^x}$.

方法1 $\frac{\ln x}{x}<\frac{x+\ln a}{ae^x}\Leftrightarrow\frac{\ln x}{e^{\ln x}}<\frac{x+\ln a}{e^{x+\ln a}}$.

设 $g(t)=\frac{t}{e^t}(t<1)$，则 $g'(t)=\frac{e^t-te^t}{e^{2t}}=\frac{1-t}{e^t}>0$，所以 $g(t)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增.

因为 $0<x<1,0<a<1$，所以 $\ln x<0,x+\ln a<0$，于是原不等式等价于 $g(\ln x)<g(x+\ln a)\Leftrightarrow\ln x<x+\ln a\Leftrightarrow\ln a>\ln x-x$ 在 $(0,1)$ 上恒成立.

令 $h(x)=\ln x-x(0<x<1)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，于是 $\ln a\geqslant h(1)=-1$，即 $\frac{1}{e}\leqslant a<1$.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{e},1\right)$.

方法2 $\frac{\ln x}{x}<\frac{x+\ln a}{ae^x}\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}<\frac{\ln(ae^x)}{ae^x}$.

令 $g(t)=\frac{\ln t}{t}(0<t<e)$，则 $g'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}>0$，所以 $g(t)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增.

原不等式等价于 $g(x)<g(ae^x)\Leftrightarrow x<ae^x\Leftrightarrow a>\frac{x}{e^x}\Leftrightarrow\ln a>\ln x-x$ 在 $(0,1)$ 上恒成立. 下同解法1.

评析 三种同构途径：①同左 $\frac{e^a}{a}\leqslant\frac{e^{\ln b}}{\ln b}$（或 $\frac{a}{e^a}\leqslant$

$\frac{\ln b}{e^{\ln b}}$),构造函数$f(x)=\frac{e^x}{x}$(或$f(x)=\frac{x}{e^x}$);②同右$\frac{e^a}{\ln e^a}\leqslant\frac{b}{\ln b}$(或$\frac{\ln e^a}{e^a}\leqslant\frac{\ln b}{b}$),构造函数$f(x)=\frac{x}{\ln x}$(或$f(x)=\frac{\ln x}{x}$);③取对数$a-\ln a\leqslant\ln b-\ln(\ln b)$(或$\ln a-a\leqslant\ln(\ln b)-\ln b$),构造函数$f(x)=x-\ln x$(或$f(x)=\ln x-x$).指数和对数混合的导数题,直接使用同构的题目并不多,许多情况下,需要凑出同构的形式,因为指数和对数之间可以互相转换,尽量转换为常见的$ae^a\leqslant b\ln b$,$\frac{e^a}{a}\leqslant\frac{b}{\ln b}$,$e^a\pm a\leqslant b\pm\ln b$三种同构形式.

3.3 和差型 $e^a\pm a\leqslant b\pm\ln b$ 同构

例题 5 已知函数$f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$,若$f(x)\geqslant1$,求$a$的取值范围.

解析 将$f(x)\geqslant1$按照左右结构相同、变量移至一边的原则进行变形:

由$f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a\geqslant1$,移项,得$ae^{x-1}+\ln a\geqslant\ln x+1$.即$e^{\ln a+x-1}+\ln a\geqslant\ln x+1$.

两边同时加$x-1$,得

$e^{\ln a+x-1}+x+\ln a-1\geqslant\ln x+x$.

即$e^{\ln a+x-1}+(x+\ln a-1)\geqslant\ln x+e^{\ln x}$.

设$g(x)=x+e^x$,则$g'(x)=1+e^x>0$.

所以$g(x)$单调递增.

所以$\ln a+x-1\geqslant\ln x$.

即$x-\ln x+\ln a-1\geqslant0$.

设$h(x)=x-\ln x+\ln a-1$,则$h'(x)=1-\frac{1}{x}$.

所以$h(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增.

所以$h(x)_{\min}=h(1)=\ln a-1\geqslant0$,故$a\geqslant1$.

评析 两种同构途径:①同左$e^a\pm a\leqslant e^{\ln b}\pm\ln b$,构造函数$f(x)=e^x\pm x$;②同右$e^a\pm\ln e^a\leqslant b\pm\ln b$,构造函数$f(x)=x\pm\ln x$.对原不等式同解变形,如移项、通分、取对数、系数升指数等,有时也需要对两边同时加、乘某式等,把不等式转化为左右两边是相同结构的式子,根据“相同结构”构造辅助函数.

4 利用同构法巧求零点或证明不等式问题

例题 6 已知函数$f(x)=x(x-\ln\frac{x^2}{a})$关于$x$的方程$f(x)=a$存在四个不等实数根,则实数$a$的取值范围是( ).

A. $(0,1)\cup(1,e)$　　B. $(0,\frac{1}{e})$

C. $(\frac{1}{e},1)$　　D. $(0,1)$

解析 首先由$f(x)$的定义域可知,$\frac{x^2}{a}>0\Rightarrow a>0$.

由$f(x)=a$可得$a(x-\ln\frac{x^2}{a})=a$,$x-\ln\frac{x^2}{a}-\frac{a}{x}=0$.

设$g(x)=x-\ln\frac{x^2}{a}-\frac{a}{x}$,当$x<0$时,$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增,且$g(-\sqrt{a})=0$,故$g(x)$在$(-\infty,0)$上有唯一实数根;

当$x>0$时,由$x-\ln\frac{x^2}{a}-\frac{a}{x}=0$,得$x-\ln\frac{x^2}{a}=\frac{a}{x}$,所以$x+\ln\frac{a}{x^2}=\frac{a}{x}$,即$x-\ln x=\frac{a}{x}-\ln\frac{a}{x}$.

令$h(x)=x-\ln x$,则$h'(x)=\frac{x-1}{x}$,所以$h(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增.

当$x=\frac{a}{x}$即$x=\sqrt{a}$时,满足题意;

当$x\neq\frac{a}{x}$时,由$x-\ln x=\frac{a}{x}-\ln\frac{a}{x}$,得$1=\frac{x-\frac{a}{x}}{\ln x-\ln\frac{a}{x}}>\sqrt{x\cdot\frac{a}{x}}=\sqrt{a}$,所以$0<a<1$,故选 D.

评析 同构思想在求函数的零点或证明不等式等问题中有着巧妙应用,尤其所涉及函数包含指数、对数函数混合的类型,这种方法关键在于化函数式为结构相同的式子,再构造函数进一步解决问题.

同构法构造函数是高中数学解题的一种常见方法,在解题实践过程中,若能通过观察、分析、整理等变形手段,看清题中函数结构的共性或等式(或不等式)两侧同构,则可轻松构造函数,巧妙利用函数单调性解题.尤其是遇到“指数函数和对数函数”同时出现的试题时,我们可考虑采用“同构”的方法变形转化构造函数,从而达到化难为易,删繁就简的功效.

参考文献:

[1]张志刚.例谈不等式中的同构变形策略[J].中学数学研究(华南师范大学版),2021(03):27-29.

[2]方明生.聚焦问题本质,培养解题能力——从一道联考试题的多角度分析看“同构法”解决不等式恒成立问题的求解策略[J].数学教学研究,2020,39(05):33-35+39.

(收稿日期:2021-07-28)