

略谈高考复习中函数与导数解题能力的培养^{*}

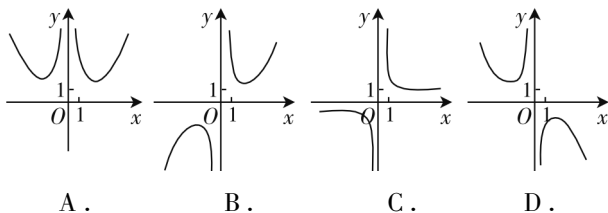
● 青海师范大学附属实验中学 庞志雷

函数与导数,是高考考查考生数学思想方法、数学能力和数学核心素养的主要载体.函数考点主要有函数的概念与表示、函数的性质、三个基本初等函数及函数的应用,对导数的考查主要有导数的概念和几何意义、导数的运算以及导数的应用,考查利用导数方法研究函数问题,如函数的单调性、最(极)值、函数的零点,研究方程和不等式的解的情况等.由此可见,高考复习中函数与导数面广量大,因此,我们必须抓住重点,突破主要矛盾和方法盲点,才能达到有效复习的目的.那么,从解题角度看,我们应培养哪些能力呢?

1 培养特殊化思想,提高解题能力

选择题是高考数学的客观题型之一,其小巧玲珑,知识覆盖面较广,主要考查考生思维的灵活性,而非思维的完整性.从四个选项中选出一个答案,一般可采用排除法,如何排除,那就要试值,即特殊值法,它可以将问题特殊化,化抽象为具体,既可以减少计算量和思维量,又可以提高准确率.函数图象型选择题是高考中经常出现的一类问题,在复习时,教师应选择相关题目供学生训练,让学生感知特殊值法在解选择题中的优越性.

例 1 已知函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$, 则它的图象大致为().



解法 1: 计算 $f(-1) < 0$, 排除 A, D, 又 $f(3) > 2$, 排除 C, 故选 B.

解法 2: 因为这个函数满足 $f(-x) = -f(x)$, 所以它是奇函数, 又 $f(3) > 2$, 可排除 C 和 D, 于是选 B.

解法 3: 容易发现这个函数的分子 $y = e^x - e^{-x}$ 是奇函数, 它的分母 $y = x^2$ 是偶函数, 于是根据函数奇偶性的规律, 即奇函数与偶函数的商在公共定义域上为奇函数, 就可知道 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$ 是奇函数. 在仿照法 2 求解.

点评: 上述三种解法有涉及特殊值法, 通过特殊值代入判断, 答案可谓“立等即取”. 然而, 有的考生却盲目地利用导数去考察 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$ 的单调性, 小题大做却无功而返. 从本题可以看出, 特殊值法对图象判断题的有效性与重要性.

2 渗透转化与化归思想, 提升解题能力

含参问题是高考中的常客, 它不仅考查学生分清参变量关系的分析能力和分类讨论的思想, 更主要地考查转化与化归思想, 如何将其转化为函数问题, 或方程问题, 或不等式问题或函数图象问题, 方法的正确与否直接影响到解题速度与准确率. 因此, 在高考复习时, 我们有意识地培养转化与化归的能力, 从而实现不断提高解题能力的目的.

例 2 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases} g(x) = f(x) + x + a$. 如果函数 $g(x)$ 有 2 个零点, 那么实数 a 的取值范围是().

- A. $[-1, 0)$
 B. $[0, +\infty)$
 C. $[-1, +\infty)$
 D. $[1, +\infty)$

解法: (图象法) 因为函数 $g(x)$ 有 2 个零点, 所以方程

$g(x) = 0$ 有两个解, 等价于 $y = f(x)$ 与 $y = -x - a$ 的图象有两个不同的交点, 如图 1 所示, 当直线的截距 $-a \leq 1$ 时, 即 $a \geq -1$ 时符合, 所以本题选 C.

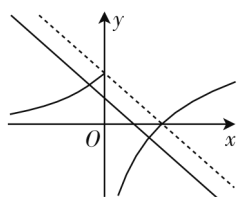


图 1

^{*} 项目课题: 本文系青海师范大学 2020 年校级基础教育教学研究项目课题“高中数学实验教学研究”(课题编号: qhnujy2020134) 阶段性成果之一.



3 加强数形结合的思想, 强化解题能力

对函数问题的研究, 离不开函数图象, 而导数的应用恰是为研究函数的性态服务的. 对于较为复杂的函数问题, 我们应该引导学生将抽象的逻辑思维向直观的形象思维转化, 利用函数图象, 发现解题思路, 制订解题方案. 而对于抽象函数, 则引导学生先研究它的性质, 通过性质找到具体模型与之对应, 或者作示意图. 在高考复习时, 对于函数问题我们要强化识图、画图与用图意识, 让函数图象成为我们解题的好帮手.

例3 已知函数 $f(x) = xe^{-x} (x \in \mathbf{R})$, 且满足 $x_1 \neq x_2$ 时 $f(x_1) = f(x_2)$, 求证: $x_1 + x_2 > 2$.

解析: 由 $f(x) = xe^{-x} (x \in \mathbf{R})$, 得 $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, 当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$. 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 又当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, $f(0) = 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极大值 $f(1)$, 极大值 $f(1) = \frac{1}{e}$, 如图2所示.

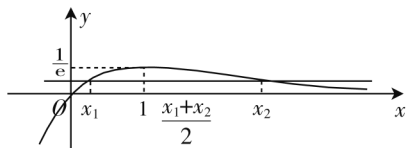


图2

由 $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 \neq x_2$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则必有 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 构造函数 $F(x) = f(1+x) - f(1-x)$, $x \in (0, 1]$, 则 $F'(x) = f'(1+x) + f'(1-x) = \frac{x}{e^{x+1}}(e^{2x} - 1) > 0$, 所以 $F(x)$ 在 $x \in (0, 1]$ 上单调递增, $F(x) > F(0) = 0$, 也即 $f(1+x) > f(1-x)$ 对 $x \in (0, 1]$ 恒成立.

由 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 则 $1-x_1 \in (0, 1]$, 所以 $f[1+(1-x_1)] = f(2-x_1) > f[1-(1-x_1)] = f(x_1) = f(x_2)$, 即 $f(2-x_1) > f(x_2)$. 又因为 $2-x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 且 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $2-x_1 < x_2$, 即证 $x_1 + x_2 > 2$.

点评: 利用导数这个解题“工具”证明不等式, 是高考中的难点题型, 如何把抽象问题具体化、直观化, 数形结合是最好的途径. 本题利用导数研究函数性态, 并作出其大致图象, 为后续证明指明了方向, 使解目标更明确更清晰.

4 培养导数的应用意识, 提高解题能力

导数在函数综合题中, 考查的是它的工具作用. 对于许多函数问题, 通常要研究它的单调性、最值和零点等问题, 这时我们不得不用到导数. 从以往高考命题

来看, 对导数的考查重点放在导数的应用上, 主要包括下面几点: (1) 利用导数的几何意义解决相关问题, 如切线问题、切点问题等; (2) 利用导数研究函数单调, 要求函数的单调区间, 或判断函数的单调性, 或已知函数的单调性求参数; (3) 导数的实际应用, 主要用于生活中的最优化问题; (4) 数形结合思想的应用. 因此, 在高考复习中, 我们应该强化导数的应用意识, 在导数的综合应用中, 提高解题能力.

例4 已知函数 $f(x) = e^{x+1} - ma$, $g(x) = ae^x - x (m, a \in \mathbf{R})$, 如果存在实数 a , 使得 $f(x) \leq g(x)$ 对一切实数 x 恒成立, 那么实数 m 的取值范围为_____.

解析: 令 $h(x) = f(x) - g(x) = e^{x+1} - ma - ae^x + x = (e-a)e^x - ma + x$, 则 $h'(x) = (a-e)e^x + 1$.

(1) 若 $e-a \geq 0$, 可得 $h'(x) > 0$, 函数 $h(x)$ 为增函数, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, 不满足 $h(x) \leq 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

(2) 若 $e-a < 0$, 由 $h'(x) = 0$, 得 $x = \ln \frac{1}{a-e}$.

令 $h'(x) > 0$, 则 $x < \ln \frac{1}{a-e}$;

令 $h'(x) < 0$, 则 $x > \ln \frac{1}{a-e}$.

所以 $h(x)_{\max} = h\left(\ln \frac{1}{a-e}\right) = (e-a)e^{\ln \frac{1}{a-e}} - ma + \ln \frac{1}{a-e} = -1 - ma + \ln \frac{1}{a-e}$.

若 $f(x) \leq g(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

则 $-1 - ma + \ln \frac{1}{a-e} \leq 0 (a > e)$ 恒成立.

若存在实数 a , 使得 $-1 - ma + \ln \frac{1}{a-e} \leq 0$ 成立,

则 $ma \geq -1 + \ln \frac{1}{a-e}$, 即 $m \geq \frac{\ln(a-e)}{a} - \frac{1}{a}$.

令 $F(a) = \frac{\ln(a-e)}{a} - \frac{1}{a}$,

则 $F'(a) = \frac{(a-e)\ln(a-e) - e}{a^2(a-e)}$,

所以当 $a < 2e$ 时, $F'(a) < 0$;

当 $a > 2e$ 时, $F'(a) > 0$,

则 $F(a)_{\min} = F(2e) = -\frac{1}{e}$.

所以实数 m 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

点评: 本题虽然是个填空题, 解答过程却两次用到导数, 足以看出导数在这类函数问题中的重要性. 我们不仅要重视导数的应用, 更要善于构造函数, 并用好导数. **■**