

湖南省 2022 届高三六校联考试题

数学参考答案

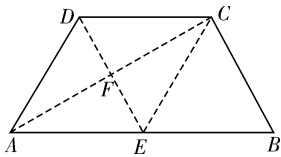
一、二、选择题

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案	D	B	C	B	A	C	A	D	CD	AC	ABD	ACD

1. D 【解析】因为 $z=2i-\frac{1}{1-i}=2i-\frac{1+i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$, 所以 $|z|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 故选 D.
2. B 【解析】由已知 $M=\{x|x=\frac{n+2}{6}, n\in\mathbf{Z}\}$, $N=\{x|x=\frac{2n+1}{6}, n\in\mathbf{Z}\}$, 又 $n+2$ 表示整数, $2n+1$ 表示奇数, 故 $M\cap N=N$, 故选 B.
3. C 【解析】设圆柱的底面半径为 r , 高为 h , 因为圆柱的侧面展开图是一个面积为 $16\pi^2$ 的正方形, 所以 $h=2\pi r$, $h^2=16\pi^2$, 所以 $h=4\pi$, $r=2$, 所以圆柱的体积为 $\pi r^2 \cdot h=16\pi^2$. 故选 C.
4. B 【解析】由题意知, $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{2}}$ 为偶函数, 又 $f'(x)=\frac{(e^{\frac{x}{2}}+1)(e^{\frac{x}{2}}-1)}{2e^{\frac{x}{2}}}$, 当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, 即函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 因为 $f(-2)=f(2)$, 又 $0<\frac{1}{2}<1<2$, 所以 $f(\frac{1}{2})<f(1)<f(2)$, 即 $m<n<p$, 故选 B.
5. A 【解析】 $f(x)=3\sin(x-\frac{\pi}{6}-\varphi)$, 当 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}$ 时, $-\varphi<x-\frac{\pi}{6}-\varphi<\frac{2\pi}{3}-\varphi$, 由 $0<\varphi<\pi$, 有 $-\varphi\in(-\pi, 0)$, $\frac{2\pi}{3}-\varphi\in(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$, 有 $\begin{cases} -\varphi\geq-\frac{\pi}{2}, \\ \frac{2\pi}{3}-\varphi\leq\frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 得 $\frac{\pi}{6}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$. 故选 A.
6. C 【解析】设事件 A_i : 第 i 次通过 IQC, 事件 B_i : 第 i 次通过 IPQC ($i=1, 2$). 由题意知 $P(A_1B_1+\overline{A_1}A_2B_1+A_1\overline{B_1}B_2+\overline{A_1}A_2\overline{B_1}B_2)=\frac{5}{6}$, 即 $\frac{3}{4}\times p+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times p+\frac{3}{4}\times(1-p)\times p+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times(1-p)\times p=\frac{5}{6}$, 解得 $p=\frac{2}{3}$ 或 $p=\frac{4}{3}$ (舍去). 故选 C.
7. A 【解析】设双曲线 C 的左焦点为 F' , 则 $|QF|-|QF'|=2a$, 即 $|QF|=|QF'|+2a$, 故 $|QF|+|PQ|=|QF'|+|PQ|+2a\geq|PF'|+2a$. 由题意可得 $|PF|=|PF'|=\sqrt{24+1}=5$, $\therefore|PQ|+|QF|+|PF|\geq 13$, $\therefore a\geq\frac{3}{2}$, 则双曲线 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{6}}{a}\leq\frac{4\sqrt{6}}{3}$. 故选 A.
8. D 【解析】因为 $a=\log_{0.1}2<0$, $b=\log_5\sqrt{2}>0$, 所以 $ab<0$, 又因为 $a+b=\log_{0.1}2+\log_5\sqrt{2}=\frac{\lg 2}{\lg 0.1}+\frac{\lg\sqrt{2}}{\lg 5}=-\lg 2+\frac{\lg 2}{2\lg 5}=\frac{\lg 2(1-\lg 25)}{\lg 25}<0$, 所以 $a+b<0$, 又因 $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_2 0.1+\log_{\sqrt{2}} 5=\log_2 0.1+\log_2 25=\log_2 2.5>1$, 所以 $\frac{a+b}{ab}>1$ 且 $ab<0$, 所以 $a+b<ab$, 所以 $a+b<ab<0$, 故选 D.
9. CD 【解析】因实数 a, b, c 满足 $(a-b)(b-c)>0\Leftrightarrow(b-a)(b-c)<0$, 又 $a>c$, 则 $c<b<a$, 若 $a<0$, 则 $a(b-c)<0$, 故 A 不正确, 取 $a>0$, 则 $a(b-c)>0$, 即选项 B 不正确, 因为 $c<b<a$, 所以 $(a-b)(a-c)>0$, $(a-c)(b-c)>0$, 故选项 C, D 正确, 故选 CD.
10. AC 【解析】 $P(B|A)+P(\overline{B}|A)=\frac{P(AB)+P(A\overline{B})}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$, 故 A 正确; 当 A, B 是相互独立事件时, 则

11. ABD 【解析】由已知可得 $a=2, b=\sqrt{2}$, 所以 $c=\sqrt{2}$, $\triangle F_1PF_2$ 的周长为 $2a+2c=4+2\sqrt{2}$, 故 A 正确; 因为 $b=c$, 所以以 F_1F_2 为直径的圆与椭圆 C 相切, 所以 $\theta \leq 90^\circ$, 故 B 正确; 因为 $S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times h = \sqrt{2}h = \sqrt{2}$, 所以 $h=1 < \sqrt{2}=b$, 所以点 P 共有 4 个, 故 C 错误; 因为 $\triangle PF_1F_2$ 为钝角三角形, 所以 $\triangle PF_1F_2$ 中有一个角大于 90° , 由选项 B 知 $\angle F_1PF_2$ 不可能为钝角, 所以 $\angle PF_2F_1$ 或 $\angle PF_1F_2$ 为钝角, 当 $\angle PF_2F_1 = 90^\circ$ 时, S 最大, 将 $x=\sqrt{2}$ 代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 得 $|y|=1$, 此时 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$, 所以三角形的面积 $S \in (0, \sqrt{2})$, 故 D 正确; 故选 ABD.

12. ACD **【解析】**取 AB 中点 E , 连接 DE , 交 AC 于 F , 因为 $AB=2AD=2BC=2CD=4$, 所以 $\triangle AED, \triangle DEC, \triangle EBC$ 都是等边三角形, 所以 $AC \perp ED$, $\angle DAC = \angle BAC = 30^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ$, 在翻折过程中, $AC \perp D'E, AC \perp FE$, 所以 $\angle D'FE = \alpha$. 对选项 A, 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 平面 $D'AC \perp$ 平面 ABC , 因为 $BC \perp AC$, 所以 $BC \perp$ 平面 $D'AC$, 又因为 $D'A \subset$ 平面 $D'AC$, 所以 $D'A \perp BC$, 所以存在 α , 使得 $D'A \perp BC$, 故 A 正确; 对于选项 B, 假设存在 α , 使得 $D'A \perp$ 平面 $D'BC$, 因为 $D'C \subset$ 平面 $D'BC$, 所以 $D'A \perp D'C$, 与 $\angle AD'C = 120^\circ$ 矛盾, 故 B 错误; 对选项 C, 作 $D'F \perp AC$ 于 F , 则 $D'F = 1$, 设 D' 到平面 ABC 的距离为 d , 由 $V_{D'-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} d = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2d = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求得 $d = \frac{1}{2}$, 此时 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$, 故 C 正确; 对选项 D, 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 使得平面 $D'AC \perp$ 平面 ABC , 设三棱锥 $D'-ABC$ 的外接球的球心 O 到平面 ABC 的距离为 d , 球的半径为 R , 则 $(d+1)^2 + 1^2 = d^2 + 2^2 = R^2$, 求得 $d = 1, R = \sqrt{5}$, 故三棱锥 $D'-ABC$ 的外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 20\pi$, 故选 ACD.



13. $\frac{3}{5}$ 【解析】 $\because \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{5}, \sin \alpha \sin \beta = \frac{2}{5}, \therefore \cos(\beta - \alpha) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{5}.$

14. $\frac{1}{2}$ 【解析】向量 $a=(2,1), b=(1,k)$, 则 $a+2b=(4,1+2k), ka=(2k,k)$,

若 $(a+2b) \parallel (ka)$, 则 $(1+2k) \cdot 2k - 4k = 0$, 所以 $2k^2 - k = 0$, 解得 $k=0$ (舍) 或 $k=\frac{1}{2}$.

15. $\frac{1}{4}$ 【解析】当 $n=2k(k \in \mathbf{N}^*)$, 由已知条件可得 $a_{2k}+a_{2k+1}=2k \cdot (-1)^{k(2k+1)}$, 所以, $S_{2023}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2023}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2022}+a_{2023})=a_1-2+4-6+8-\cdots-2022=a_1+2 \times 505-2022=a_1-1012$, 则 $S_{2023}-a_1=-1012$, 所以, $m+S_{2023}=m+a_1-1012=-1011, \therefore m+a_1=1$, 由基本不等式可得 $ma_1 \leq \left(\frac{m+a_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 当且仅当 $m=a_1=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 此时 ma_1 取得最大值 $\frac{1}{4}$.

16. $y = (e-1)x-1$ **【解析】**由题意当 $a=1$ 时, $f(x) = e^x + \ln x - 2x$, 则 $f(1) = e-2$, $f'(1) = e-1$, 所以函数 $f(x)$ 在点 $P(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = (e-1)x-1$. 因为 $x \in (1, +\infty)$, $f(x) \geq 0$, 即 $e^x + a \ln x - x^a - x \geq 0$, 则 $\ln x^a - x^a \geq \ln e^x - e^x$, 令 $m(t) = \ln t - t$, $t > 1$, 故 $m'(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t} < 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 故 $m(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 故 $x^a \leq e^x$, 得 $a \ln x \leq x$, 即 $a \leq \frac{x}{\ln x}$, 记 $\varphi(x) = \frac{x}{\ln x}$ ($x > 1$), 则 $\varphi'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ ($x > 1$), 当 $x \in (1, e)$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 故函数 $\varphi(x)$ 在 $(1, e)$ 单调递减, 在 $(e, +\infty)$ 单调递增, 故 $\varphi(x)$ 的最小值是 $\varphi(e) = e$, 故 $a \leq e$, 即实数 a 的最大值是 e .

17. 【解析】(1) 由表中数据可得 $\bar{x}=3, \bar{y}=90$, 所以 $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 10$, 2 分
又 $\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 434, \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 64$,

$$\text{所以 } r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{64}{\sqrt{4340}} \approx 0.97 > 0.75, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

所以该电商平台直播黄金时段的天数 x 与购买人数 y 具有较高的线性相关程度.

所以可用线性回归模型拟合人数 y 与天数 x 之间的关系. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$(2) \text{ 由表中数据可得 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{64}{10} = 6.4, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{则 } \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 90 - 6.4 \times 3 = 70.8, \text{ 所以 } \hat{y} = 6.4x + 70.8, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{令 } x = 38, \text{ 可得 } \hat{y} = 6.4 \times 38 + 70.8 = 314 (\text{万人}). \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 【解析】(1) $\triangle ABC$ 中, 由 $(a-c)\sin C = a\sin A - b\sin B$ 及正弦定理得 $ac - c^2 = a^2 - b^2$,

$$\text{即 } a^2 + c^2 - b^2 = ac, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{由余弦定理 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{ac}{2ac} = \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{而 } 0 < B < \pi, \text{ 所以角 } B = \frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } a = 5, \text{ 所以 } DB = \frac{5}{2}, \text{ 由 (1) 知 } \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos B = \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\triangle ABD \text{ 中, 由余弦定理得, } AD^2 = 2^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times 2 \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{21}{4},$$

$$\text{所以 } AD = \frac{\sqrt{21}}{2}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{AD}{\sin B} = \frac{AB}{\sin \angle BDA}, \text{ 故 } \sin \angle BDA = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{21}}{2}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{故 } \cos 2\angle ADC = \cos(2\pi - 2\angle BDA) = \cos 2\angle BDA = 1 - 2\sin^2 \angle BDA = -\frac{1}{7}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 【解析】解法一: (1) 连接 DF, BD , 设 $DF \cap CE = G, AC \cap BD = Q$, 连接 QG .

因为 E, F 分别是 PD, AC 的中点,

$$\text{所以 } G \text{ 是 } \triangle PCD \text{ 的重心, 所以 } DG = 2GF, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } AD \parallel BC, \text{ 且 } AD = 2BC, \text{ 所以 } DQ = 2QB, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } BF \parallel QG, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } QG \subset \text{平面 } ACE, BF \not\subset \text{平面 } ACE, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } BF \parallel \text{平面 } ACE. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由已知条件得 } AC = DC = 2\sqrt{2}, AD = 4, \text{ 所以 } AC^2 + CD^2 = AD^2,$$

$$\therefore AC \perp CD, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } PA \perp \text{底面 } ABCD, \text{ 所以 } PA \perp CD, \text{ 又 } \because PA \cap AC = A,$$

$$\text{所以 } CD \perp \text{平面 } PAC, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

过点 C 作 AF 的垂线交 AF 于 M , 连接 DM .

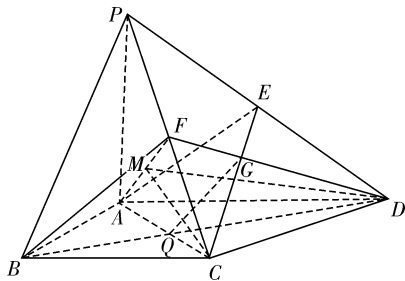
$$\because CD \perp AM, CM \perp AM, CM \cap CD = C, \therefore AM \perp \text{平面 } CMD, \therefore MD \perp AM.$$

$$\therefore \angle DMC \text{ 为二面角 } D-AF-C \text{ 的平面角.} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{设 } \angle CAF = \theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], CM = AC \cdot \sin \theta = 2\sqrt{2} \sin \theta. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\tan \angle DMC = \frac{CD}{CM} = \frac{1}{\sin \theta} \in [1, +\infty), \therefore \angle DMC \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{即二面角 } D-AF-C \text{ 的范围为 } \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right). \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$



解法二:(1)由题意知 AB, AD, AP 两两垂直, 建立如图所示空间直角坐标系, 则 $A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,2,0), D(0,4,0), P(0,0,2)$,
 所以 $E(0,2,1), F(1,1,1)$, 1 分
 因为 $\overrightarrow{AC}=(2,2,0), \overrightarrow{AE}=(0,2,1)$, 2 分
 设平面 ACE 的一个法向量为 $\mathbf{m}=(x,y,z)$,

由 $\begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{m}=0, \\ \overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{m}=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 2x+2y=0, \\ 2y+z=0, \end{cases}$ 令 $x=1$ 得 $\mathbf{m}=(1,-1,2)$, 3 分

因为 $\overrightarrow{BF}=(-1,1,1)$, 所以 $\overrightarrow{BF} \cdot \mathbf{m}=-1-1+2=0$, 4 分

又因为 $BF \not\subset$ 平面 ACE , 所以 $BF \parallel$ 平面 ACE 5 分

(2) 设平面 PAC 的一个法向量是 $\mathbf{n}_1=(x_1, y_1, z_1)$, 因为 $\overrightarrow{AP}=(0,0,2), \overrightarrow{AC}=(2,2,0)$,

由 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AP}=2z_1=0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AC}=2x_1+2y_1=0, \end{cases}$ 令 $x_1=1$, 得 $\mathbf{n}_1=(1,-1,0)$ 8 分

设平面 AFD 的一个法向量是 $\mathbf{n}_2=(x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{CF}=\lambda \overrightarrow{CP} (0 < \lambda \leq 1)$.

则 $\overrightarrow{AD}=(0,4,0), \overrightarrow{AF}=(2-2\lambda, 2-2\lambda, 2\lambda)$, 9 分

由 $\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{AD}=4y_2=0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{AF}=(2-2\lambda)x_2+(2-2\lambda)y_2+2\lambda z_2=0, \end{cases}$

令 $x_2=1$, 得 $\mathbf{n}_2=(1, 0, 1-\frac{1}{\lambda})$, 10 分

$$\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)^2+1}} \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right],$$

所以二面角 $D-AF-C$ 的范围为 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 12 分

20. 【解析】(1) 因为 $a_1=1$, 由 $S_5=S_2+21$ 得 $a_3+a_4+a_5=21$, 所以 $3a_4=21$, 即 $a_4=7$,

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 所以 $d=\frac{a_4-a_1}{4-1}=\frac{7-1}{3}=2$,

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1) \times 2=2n-1$ 3 分

由 $b_{n+1}=5T_n+6(n \in \mathbf{N}^*)$, 得 $b_n=5T_{n-1}+6(n \geq 2)$,

两式相减得 $b_{n+1}-b_n=5(T_n-T_{n-1})=5b_n$, 得 $b_{n+1}=6b_n$, 所以 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=6$,

又 $b_2=5T_1+6=5b_1+6=36=6b_1$,

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 6 为首项, 6 为公比的等比数列,

$b_n=b_1 \cdot 6^{n-1}=6^n$, 6 分

(2) 由题意得 $n \in \mathbf{N}^*$, 均有 $a_{n+1}=\frac{c_1}{b_1}+\frac{c_2}{b_2}+\frac{c_3}{b_3}+\cdots+\frac{c_n}{b_n}$,

所以 $n \geq 2$ 时, 有 $a_n=\frac{c_1}{b_1}+\frac{c_2}{b_2}+\frac{c_3}{b_3}+\cdots+\frac{c_{n-1}}{b_{n-1}}$,

两式相减得 $a_{n+1}-a_n=\frac{c_n}{b_n}=2(n \geq 2)$, $\therefore c_n=2 \times 6^n (n \geq 2)$, 8 分

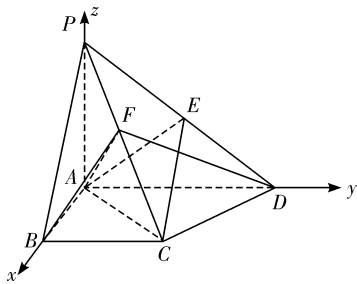
所以 $c_n=\begin{cases} 18(n=1), \\ 2 \cdot 6^n (n \geq 2). \end{cases}$ 9 分

当 $n=1$ 时, $M_1=c_1=18$,

当 $n \geq 2$ 时, $M_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=18+2(6^2+6^3+6^4+\cdots+6^n)$

$$=6+2(6^1+6^2+6^3+\cdots+6^n)=6+2 \cdot \frac{6(6^n-1)}{6-1}=\frac{2 \cdot 6^{n+1}+18}{5}.$$

当 $n=1$ 时, $M_1=18$ 也满足上式, 综上, $M_n=\frac{2 \cdot 6^{n+1}+18}{5}$ 12 分



21. 【解析】(1)由已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F(\frac{p}{2}, 0)$, 1 分

令 $x = \frac{p}{2}$, 代入 $y^2 = 2px$, 解得 $y = \pm p$, 所以 $|PQ| = 2p$, 2 分

所以 $S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} |OF| |PQ| = \frac{1}{2} \times \frac{p}{2} \times 2p = \frac{p^2}{2} = 2$, 解得 $p = 2$, 3 分

故抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$ 4 分

(2)由题设 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FB} (\lambda > 0)$, 知 AB 过焦点 F , 且 AB 与坐标轴不垂直,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 直线 $AB: x = ty + 1, (t \neq 0)$,

将 $x = ty + 1$ 代入 $y^2 = 4x$, 得 $y^2 - 4ty - 4 = 0$.

则 $y_1 + y_2 = 4t, y_1 y_2 = -4$,

得 AB 的中点为 $E(2t^2 + 1, 2t)$, $|AB| = \sqrt{1+t^2} |y_1 - y_2| = 4(t^2 + 1)$ 6 分

又因为 $\overrightarrow{MD} = \mu \overrightarrow{DN} (\mu > 0)$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$, 所以直线 MN 的斜率为 $-t$, 且过 AB 的中点 $E(2t^2 + 1, 2t)$,

所以 MN 的方程为 $y - 2t = -t(x - 2t^2 - 1)$, 即 $x = -\frac{1}{t}y + 2t^2 + 3$ 7 分

代入 $y^2 = 4x$, 并整理得 $y^2 + \frac{4}{t}y - 4(2t^2 + 3) = 0$,

设 $M(x_3, y_3)$, $N(x_4, y_4)$, 则 $y_3 + y_4 = -\frac{4}{t}, y_3 y_4 = -4(2t^2 + 3)$,

故 MN 的中点为 $D(\frac{2}{t^2} + 2t^2 + 3, -\frac{2}{t})$,

$|MN| = \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} |y_3 - y_4| = \frac{4(t^2 + 1)\sqrt{2t^2 + 1}}{t^2}$ 9 分

因为 MN 是直径, 所以 MN 垂直平分 AB ,

所以 A, M, B, N 四点在同一个圆上等价于 $|AD| = |BD| = \frac{1}{2} |MN|$,

所以 $\frac{1}{4} |AB|^2 + |ED|^2 = \frac{1}{4} |MN|^2$,

即 $4(t^2 + 1)^2 + \left[\left(2t + \frac{2}{t} \right)^2 + \left(\frac{2}{t^2} + 2 \right)^2 \right] = \frac{4(t^2 + 1)^2 (2t^2 + 1)}{t^4}$,

化简得 $t^2 - 1 = 0$, 解得 $t = 1$ 或 $t = -1$ 11 分

所以直线 AB 的方程为 $x + y - 1 = 0$ 或 $x - y - 1 = 0$ 12 分

22. 【解析】(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

当 $a = 1$ 时, $f(x) = \frac{e^x}{x} + \ln x - x$,

所以 $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} + \frac{1}{x} - 1 = (x-1) \left(\frac{e^x - x}{x^2} \right)$, 1 分

又因为 $e^x \geq x + 1 > x$, 所以 $e^x - x > 0$, 2 分

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增. 3 分

(2)由已知, $f'(x) = \frac{(ae^x - x)(x-1)}{x^2} = \frac{e^x \left(a - \frac{x}{e^x} \right) (x-1)}{x^2} (x > 0)$,

函数 $u(x) = \frac{x}{e^x}$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减, 所以 $u(x) \leq u(1) = \frac{1}{e}$,

又当 $x > 0$ 时, $e^x > 1, 0 < u(x) \leq \frac{1}{e}$, 4 分

①当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $a - \frac{x}{e^x} \geq 0$, 此时当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

所以 $f(x)_{\text{极小值}} = f(1) = ae - 1$, 无极大值; 5 分

② 当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, $u(a) = \frac{a}{e^a} < \frac{a}{e^0} = a, u(1) = \frac{1}{e} > a$, 又 $u(x)$ 在 $(a, 1)$ 单调递增,

所以 $f'(x)$ 在 $(a, 1)$ 上有唯一零点 x_1 , 且 $\frac{x_1}{e^{x_1}} = a$,

易证: $x > e$ 时, $2\ln x < x$, 所以 $2\ln \frac{1}{a} < \frac{1}{a}$,

所以 $u\left(\ln \frac{1}{a^2}\right) = \frac{\ln \frac{1}{a^2}}{e^{\ln \frac{1}{a^2}}} = a \cdot \frac{2\ln \frac{1}{a}}{\frac{1}{a}} < a, u(1) = \frac{1}{e} > a$,

又 $u(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减, 所以 $f'(x)$ 在 $\left(1, \ln \frac{1}{a^2}\right)$ 上有唯一零点 x_2 , 且 $\frac{x_2}{e^{x_2}} = a$,

故当 $x \in (0, x_1)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_1, 1)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (1, x_2)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;

所以函数 $f(x)$ 有两个极小值点.

故实数 a 的取值范围为 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 7 分

(3) 由已知 $F(x) = f(x) - \left(2\ln x - x + \frac{1}{x}\right)$,

即 $F(x) = \frac{ae^x}{x} - \ln x - \frac{1}{x}$, 其定义域为 $(0, +\infty)$, 所以 $F'(x) = \frac{(x-1)(ae^x-1)}{x^2}$,

当 $F'(x) = 0$ 时, $x = 1$ 或 $x = -\ln a$,

因为 $a \in (1, +\infty)$, 所以 $-\ln a < 0$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $F'(x) < 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0$,

所以 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增.

所以 $F(x) \geq F(1) = ae - 1$ 9 分

所以要证 $F(x) \geq \frac{\ln(ax)}{x} - \ln x + e - 1$, 只需证 $\frac{\ln(ax)}{x} - \ln x + e - 1 \leq ae - 1$,

即证 $\frac{\ln(ax)}{x} - \ln x \leq (a-1)e$,

令 $G(x) = \frac{\ln(ax)}{x} - \ln x$,

则 $G'(x) = \frac{1}{x^2} [1 - x - \ln(ax)]$,

记 $h(x) = 1 - x - \ln(ax)$, 则 $h'(x) = -1 - \frac{1}{x} < 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 又 $h\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - \frac{1}{a} > 0, h(1) = -\ln a < 0$,

故存在 $x_0 \in \left(\frac{1}{a}, 1\right)$, 使得 $h(x_0) = 1 - \ln(ax_0) - x_0 = 0$, 即 $\ln(ax_0) = 1 - x_0$, 10 分

$\therefore G(x) \leq G(x_0) = \frac{\ln(ax_0)}{x_0} - \ln x_0 = \frac{1}{x_0} - \ln x_0 - 1$,

记 $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1$, 在 $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$ 上单调递减, $\varphi(x_0) < \varphi\left(\frac{1}{a}\right) = a + \ln a - 1$,

故只需证 $a + \ln a - 1 < (a-1)e$, 即 $m(a) = (e-1)(a-1) - \ln a > 0$,

$\therefore m'(a) = e - 1 - \frac{1}{a} > 0, \therefore m(a)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $m(a) > m(1) = 0$ 成立,

故原不等式成立. 12 分