

2021~2022 学年度第一学期高三年级期中抽测

数 学 试 题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \geq 0\}$, $B = \{x | y = \sqrt{x-1}\}$, 则 $A \cup B =$

A. $[2, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $(-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$ D. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

【答案】D

【解析】 $A = \{x | (x-2)(x+1) \geq 0\} = \{x | x \geq 2 \text{ 或 } x \leq -1\}$, $B = \{x | x \geq 1\}$,

$A \cup B = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, 选 D.

2. 若复数 z 满足 $\frac{z}{1-i} = 2i$ (其中 i 为虚数单位), 则 z 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】A

【解析】 $z = (1-i)2i = 2i - 2i^2 = 2 + 2i$, 第一象限, 选 A.

3. 某校开设 A 类选修课 4 门, B 类选修课 3 门. 若某同学从中选 3 门, 要求两类课程中都至少选一门, 则不同的选法种数共有

A. 18 种 B. 24 种 C. 30 种 D. 36 种

【答案】C

【解析】 $C_4^1 C_3^2 + C_4^2 C_3^1 = 12 + 18 = 30$, 选 C.

4. 已知 a, b 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 且 $a \perp \alpha$, $\alpha \perp \beta$, 则 “ $a \perp b$ ” 是 “ $b \perp \beta$ ” 的

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分又不必要条件

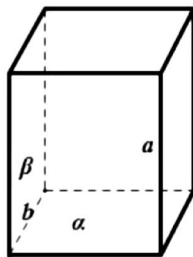
【答案】B

【解析】 $a \perp \alpha, \alpha \perp \beta$ ，则 $a \subset \beta$ 或 $a \parallel \beta$ 。

若 $a \perp b$ ，如图所示， $a \perp \alpha, \alpha \perp \beta$ ，但是 b 与 β 不垂直，

\therefore “ $a \perp b$ ” 是 “ $b \perp \beta$ ” 的不充分条件， $b \perp \beta$ ，则 $b \perp a$ ，

\therefore “ $a \perp b$ ” 是 “ $b \perp \beta$ ” 的必要条件，必要不充分条件，选 B。



5. 若 $(x - \frac{a}{x})^8$ 的二项展开式中 x^6 的系数是 -16 ，则实数 a 的值是

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

【答案】D

【解析】展开式中第 $r+1$ 项， $T_{r+1} = C_8^r x^{8-r} \left(-\frac{a}{x}\right)^r = C_8^r (-a)^r x^{8-2r}$ ，

$8-2r=6$ ，则 $r=1$ ， $C_8^1 (-a)^1 = -16$ ， $\therefore a=2$ ，选 D。

6. 某单位招聘员工，先对应聘者的简历进行评分，评分达标者进入面试环节。现有 1000 人应聘，他们的简历评分 X 服从正态分布 $N(60, 10^2)$ ，若 80 分及以上为达标，则估计进入面试环节的人数约为

(附：若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$ ， $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$ ， $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$)

A. 12

B. 23

C. 46

D. 159

【答案】B

【解析】 $P(X \geq 80) = P(X \geq \mu + 2\sigma) = \frac{1 - P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)}{2}$
 $= \frac{1 - 0.9545}{2} = 0.02275$ ， $1000 \times 0.02275 = 22.75$ ，选 B。

7. 已知第二象限角 θ 的终边上有异于原点的两点 $A(a, b)$ ， $B(c, d)$ ，且 $\sin \theta + 3 \cos \theta = 0$ ，若 $a+c=-1$ ， $\frac{1}{b} + \frac{4}{d}$ 的最小值为

A. $\frac{8}{3}$

B. 3

C. $\frac{10}{3}$

D. 4

【答案】B

【解析】 $\tan \theta + 3 = 0$ ， $\therefore \tan \theta = -3$ ， $\therefore \frac{b}{a} = -3$ ， $\frac{d}{c} = -3$ ，

$$\therefore b = -3a, d = -3c, \text{ 其中 } a, c < 0, a + c = -1, \therefore -\frac{b}{3} - \frac{d}{3} = -1, \therefore \frac{b}{3} + \frac{d}{3} = 1,$$

$$\frac{1}{b} + \frac{4}{d} = \left(\frac{1}{b} + \frac{4}{d} \right) \left(\frac{b}{3} + \frac{d}{3} \right) = \frac{1}{3} + \frac{d}{3b} + \frac{4b}{3d} + \frac{4}{3} \geq \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = 3, \text{ 选 B.}$$

8. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - b$, 数列 $\{(ab)^n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若数列 $\{T_n\}$ 是等差数列, 则非零实数 a 的值是

- A. -3 B. $\frac{1}{3}$ C. 3 D. 4

【答案】C

$$\text{【解析】 } a_1 = \frac{1}{9} - b, a_2 = -\frac{2}{27}, a_3 = -\frac{2}{81},$$

$$a_1, a_2, a_3 \text{ 成等比数列, } \therefore \frac{1}{9} - b = -\frac{2}{9}, \therefore b = \frac{1}{3}, (ab)^n = \left(\frac{a}{3}\right)^n,$$

$$a = 3 \text{ 时, } (ab)^n = 1, T_n = n, \{T_n\} \text{ 是等差数列, 选 C.}$$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 十六世纪中叶，英国数学家雷科德在《砺智石》一书中首先把“=”作为等号使用，后来英国数学家哈利奥特首次使用“<”和“>”符号，并逐渐被数学界接受，不等号的引入对不等式的发展影响深远。若 $a < b$, 则下列结论错误的是

- A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. $a^2 < b^2$ C. $\left(\frac{1}{2}\right)^a > \left(\frac{1}{2}\right)^b$ D. $\ln(b-a) > 0$

【答案】ABD

$$\text{【解析】 } -2 < 1, \text{ 但 } -\frac{1}{2} < 1, \therefore a < b \text{ 不可得 } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}, \text{ A 错, 要选.}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \text{ 无法判断 } a+b \text{ 的符号, 所以无法判断 } a^2 - b^2 \text{ 符号, B 错, 要选.}$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上 } \searrow, a < b, \text{ 则 } \left(\frac{1}{2}\right)^a > \left(\frac{1}{2}\right)^b, \text{ C 对, 不选.}$$

$$\text{无法判断 } b-a \text{ 与 } 1 \text{ 的大小, } \therefore \text{无法判断 } \ln(b-a) \text{ 与 } 0 \text{ 的大小, D 错, 要选.}$$

选 ABD.

10. 已知圆 $M: x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0$, 点 $P(a, b)$ 是圆 M 上的动点, 则

- A. 圆 M 关于直线 $x + 3y + 2 = 0$ 对称 B. 直线 $x + y = 0$ 与圆 M 相交所得弦长为 $\sqrt{3}$
C. $\frac{b}{a-3}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$ D. $a^2 + b^2$ 的最小值为 $\sqrt{5} - 2$

【答案】AC

【解析】 $(x+2)^2 + y^2 = 5$ ，圆心 $M(-2, 0)$ ，半径 $r = \sqrt{5}$ ， C 在 $x+3y+2=0$ 上，

$\therefore C$ 关于 $x+3y+2=0$ 对称，A对.

圆心 $(-2, 0)$ 到直线 $x+y=0$ 距离 $d = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ，

$\therefore MN = 2\sqrt{5-2} = 2\sqrt{3}$ ，B错.

$\frac{b}{a-3} = \lambda$ ，则 $b = \lambda a - 3\lambda$ ，即 $\lambda a - b - 3\lambda = 0$ ，

令 $a = x, b = y$ ，即 $\lambda x - y - 3\lambda = 0$ ，

(x, y) 既在圆 M 上，又在新直线上， $\therefore \frac{|-2\lambda - 3\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \leq \sqrt{5}$ ， $\therefore \lambda \leq \frac{1}{2}$ ，

即 $\left(\frac{a}{b-3}\right)_{\max} = \frac{1}{2}$ ，C对.

$(\sqrt{a^2 + b^2})_{\min} = r - OM = \sqrt{5} - 2$ ， $(a^2 + b^2)_{\min} = 9 - 4\sqrt{5}$ ，D错.

选AC.

11. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$ 的零点依次构成一个公差为 $\frac{\pi}{2}$ 的等差数列，把函数

$f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则函数 $g(x)$

A. 是偶函数

B. 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称

C. 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上是减函数

D. 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ 上的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$

【答案】BCD

【解析】 $f(x) = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ， $f(x)$ 的零点依次构成一个公差为 $\frac{\pi}{2}$ 的等差数列，

$\therefore \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$ ，即 $T = \pi = \frac{2\pi}{\omega}$ ， $\therefore \omega = 2$ ， $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，

$g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2 \sin 2x$ ，

$g(x)$ 为奇函数，A错.

$g(x)$ 关于 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称，B对， $\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{3}{2}\pi$ ，即 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ ，

即 $g(x)$ 其中一个单调减区间为 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \subset \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$,

$\therefore g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 单调减, C 对.

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi, \quad \frac{\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{4}{3}\pi, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin 2x \leq 1, \quad -\sqrt{3} \leq 2\sin 2x \leq 2$$

即 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi\right]$ 上的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$, D 对.

选 BCD.

12. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在 \mathbf{R} 上的函数, 且方程 $f[g(x)] = x$ 有实数解, 则下列式子中可以为 $g[f(x)]$ 的是

A. $x^2 + 2x$

B. $x + 1$

C. $e^{\cos x}$

D. $\ln(|x| + 1)$

【答案】ACD

【解析】 $\because x = f[g(x)], \therefore g(x) = g[f(g(x))], \therefore x = g(f(x))$ 有解.

对于 A, $x^2 + 2x$ 有解, A 可选.

对于 B, $x = x + 1$ 无解, B 不可选.

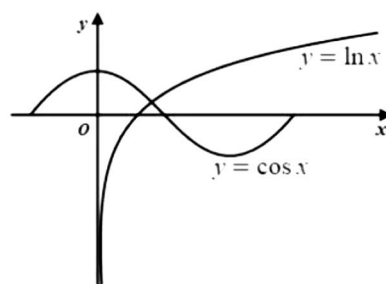
对于 C, $e^{\cos x} = x$, 则 $\cos x = \ln x$,

分别作出 $y = \cos x$ 与 $y = \ln x$ 图象, 如图,

两曲线有交点, 满足条件 C 可选.

对于 D, $x \geq 0$ 时, $x = \ln(x + 1)$, 其中 $x = 0$ 是方程的根, \therefore 有解, D 可选.

选 ACD.



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

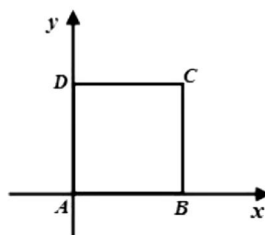
13. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, 则 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DC}$ 的值是_____.

【答案】 $-\frac{8}{3}$

【解析】以 A 为坐标原点建系,

$$A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2),$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right),$$



$$\overrightarrow{CP} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right), \overrightarrow{DC} = (2, 0), \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DC} = -\frac{8}{3}.$$

14. 设 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数, 且 $f(1+x) = f(-x)$. 若 $f(-\frac{1}{3}) = 3$, 则 $f(\frac{11}{3})$ 的值是_____.

【答案】 3

【解析】 $f(x+1) = -f(x)$, $f(x+2) = -f(x+1) = -(-f(x)) = f(x)$, $T=2$,

$$f\left(\frac{11}{3}\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = 3.$$

15. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , P 为 C 上一点. 若 $A(-2, 0)$, 则 $\frac{PA}{PF}$ 的最大值为_____.

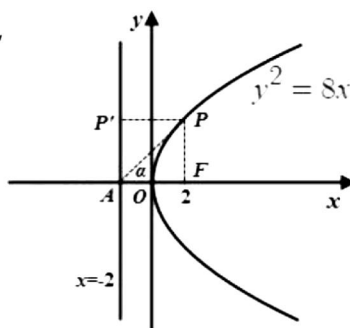
【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 P 在准线上的射影设为 P' , $\frac{PA}{PF} = \frac{PA}{PP'}$,

$$\text{设 } \angle PAF = \alpha, \text{ 则 } \frac{PA}{PF} = \frac{PA}{PP'} = \frac{1}{\frac{PP'}{PA}} = \frac{1}{\cos \alpha},$$

当 PA 与抛物线相切时,

$$\alpha \text{ 最大}, \alpha_{\max} = \frac{\pi}{4}, (\cos \alpha)_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

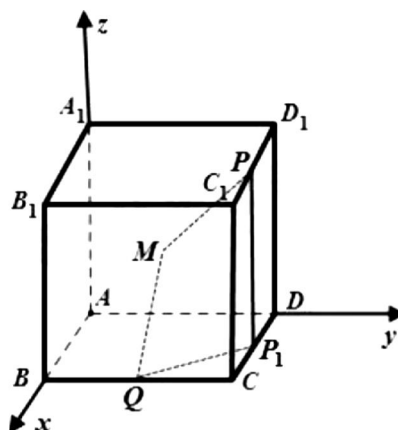


$$\left(\frac{1}{\cos \alpha}\right)_{\max} = \sqrt{2}, \text{ 即 } \left(\frac{PA}{PF}\right)_{\max} = \sqrt{2}.$$

16. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 P 在棱 D_1C_1 上运动, 点 Q 在棱 BC 上运动, 且 PQ 与 BB_1 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$. 若线段 PQ 的中点为 M , 则点 M 的轨迹的长度是_____.

【答案】 $\frac{\pi}{2}$

【解析】 法一: 如图建系.



则 $B(2,0,0)$, $C(2,2,0)$, 设 $Q(2,n,0)$, $C_1(2,2,2)$, $D_1(0,2,2)$,

设 $P(m,2,2)$, $P'(m,2,0)$, $\because PQ$ 与 BB_1 所成角为 $\frac{\pi}{4}$,

$\therefore \triangle PP_1Q$ 为等腰直角三角形 , $\therefore P_1Q = 2$,

$$\therefore \sqrt{(m-2)^2 + (n-2)^2} = 2 \quad (*)$$

$M\left(\frac{m+2}{2}, \frac{n+2}{2}, 1\right)$, 竖坐标为 1 定值 ,

只看 M 的横 , 纵坐标如图的变化.

设 $M(x,y)$, $x = \frac{m+2}{2}$, $y = \frac{n+2}{2}$,

则 $m = 2x - 2$, $n = 2y - 2$,

$\therefore (*)$ 变为 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$,

又 $\because 0 \leq m \leq 2, 0 \leq n \leq 2$, $\therefore 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$,

M 轨迹是 $\frac{1}{4}$ 圆弧 , \therefore 长度 $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$.

法二 : 过 Q 作 $QR \perp B_1C_1$ 于点 R ,

$\because PQ$ 与 QR 所成角为 $\frac{\pi}{4}$, $\therefore PQ = 2\sqrt{2}$.

设 $Q(m,2,2)$, $P(0,n,0)$, 设 PQ 中点 $M(x,y,1)$,

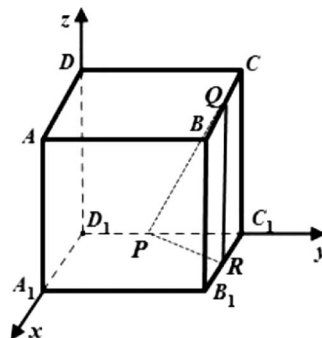
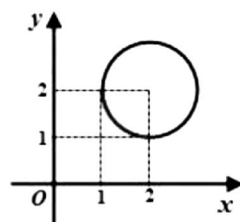
$$\therefore \begin{cases} x = \frac{m}{2} \\ y = \frac{m+2}{2} \end{cases}$$

$$\text{由 } PQ = 2\sqrt{2} \Rightarrow m^2 + (n-2)^2 + 4 = 8$$

$$\Rightarrow 4x^2 + (2y-4)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 1$$

$\therefore M$ 在底面的射影是落在正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 内的一段圆弧 ,

$\therefore M$ 的轨迹长为 $\frac{\pi \cdot 1}{2} = \frac{\pi}{2}$.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = n^2 + 2n$. 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, $b_1 = 1, a_5 - 2b_2 = a_3$.

(1)求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2)求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【解析】

$$(1) n=1 \text{ 时}, a_1 = S_1 = 3,$$

$$n \geq 2 \text{ 时}, a_n = S_n - S_{n-1} = 2n+1, n=1 \text{ 时也满足}, \therefore a_n = 2n+1,$$

$$a_5 - 2b_2 = a_3, 11 - 2b_2 = 7, \therefore b_2 = 2, \therefore q = 2, \therefore b_n = 2^{n-1}.$$

$$(2) a_n b_n = (2n+1)2^{n-1},$$

$$T_n = 3 \times 1 + 5 \times 2 + 7 \times 2^2 + \cdots + (2n-1)2^{n-2} + (2n+1)2^{n-1} \quad ①$$

$$2T_n = 3 \times 2 + 5 \times 2^2 + \cdots + (2n-1)2^{n-1} + (2n+1)2^n \quad ②$$

$$① - ②, -T_n = 3 + 2 \times 2 + 2 \times 2^2 + \cdots + 2 \times 2^{n-1} - (2n+1)2^n,$$

$$-T_n = 3 + \frac{4(1-2^{n-1})}{1-2} - (2n+1)2^n,$$

$$-T_n = 3 + 4(2^{n-1} - 1) - (2n+1)2^n = 3 + 2 \cdot 2^n - 4 - (2n+1)2^n = (-2n+1)2^n - 1,$$

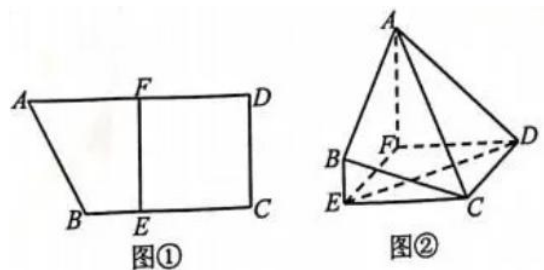
$$\therefore T_n = (2n-1)2^n + 1.$$

18. (12 分)

如图①, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD=4$, $BC=3$, 点 F 是边 AD 的中点, 点 E 在边 BC 上, 且四边形 $CEFD$ 为正方形. 将梯形 $ABEF$ 沿 EF 折起, 使得 $AC \perp DE$, 得到如图②所示的几何体.

(1)证明: 平面 $ABEF \perp$ 平面 $CEFD$;

(2)求二面角 $B-AC-D$ 的大小.



【解析】

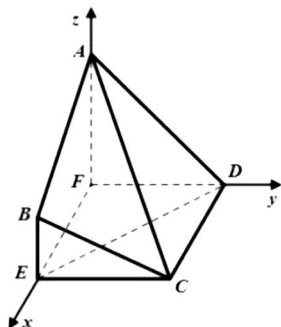
(1) 证明: \because 四边形 $CEFD$ 为正方形, $\therefore DE \perp CF$,

又 $\because DE \perp AC$, $CF \cap AC = C$, $\therefore DE \perp$ 平面 ACF , $\therefore DE \perp AF$,

又 $\because AF \perp EF$, $DE \cap EF = E$, $\therefore AF \perp$ 平面 $CEFD$,

又 $\because AF \subset$ 平面 $ABEF$, \therefore 平面 $ABEF \perp$ 平面 $CEFD$.

(2) 如图建系, 则 $B(2,0,1)$, $A(0,0,2)$, $C(2,2,0)$, $D(0,2,0)$



$$\therefore \overrightarrow{AB} = (2, 0, -1), \overrightarrow{AC} = (2, 2, -2), \overrightarrow{AD} = (0, 2, -2),$$

设平面 BAC, ACD 的一个法向量分别为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\therefore \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - z_1 = 0 \\ 2x_1 + 2y_1 - 2z_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 = (1, 1, 2),$$

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 + 2y_2 - 2z_2 = 0 \\ 2y_2 - 2z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_2 = (0, 1, 1),$$

$$\text{设二面角平面角为 } \theta, \text{ 显然 } \theta \text{ 为钝角}, \therefore \cos \theta = -\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} = -\frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \theta = 150^\circ.$$

19. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 BC 上异于点 B, C 的一点.

$$(1) \text{ 证明: } \frac{\sin \angle BAD}{AC} + \frac{\sin \angle CAD}{AB} = \frac{\sin \angle BAC}{AD};$$

(2) 若 $AD \perp AC$, $AC=9$, $AD=3$, $\sin \angle BAC = \frac{4}{5}$, 求 BD .

【解析】

$$(1) \text{ 证明: 在 } \triangle ABC \text{ 中, } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD + \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD,$$

$$\text{两边同除以 } AB \cdot AC \cdot AD \Rightarrow \frac{\sin \angle BAD}{AC} + \frac{\sin \angle CAD}{AB} = \frac{\sin \angle BAC}{AD}.$$

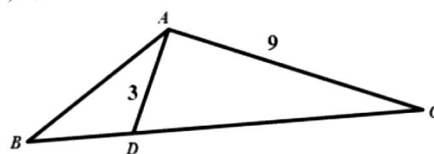
$$(2) CD = \sqrt{81+9} = 3\sqrt{10}, \therefore \sin \angle ADC = \frac{9}{3\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} = \sin \angle ADB,$$

$$\cos \angle ADC = \frac{\sqrt{10}}{10}, \sin \angle BAC = \cos \angle BAD = \frac{4}{5}, \therefore \sin \angle BAD = \frac{3}{5},$$

在 $\triangle ABD$ 中, $\sin \angle ABD = \sin(\angle ADC - \angle BAD)$,

$$= \frac{3\sqrt{10}}{10} \times \frac{4}{5} - \frac{\sqrt{10}}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{9\sqrt{10}}{50}$$

$$\text{由正弦定理} \Rightarrow \frac{3}{\frac{9\sqrt{10}}{50}} = \frac{BD}{\frac{3}{5}} \Rightarrow BD = \sqrt{10}.$$



20. (12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点为 A , 右焦点为

F , 点 $P(2, 3)$ 在双曲线 C 上, 直线 l 与双曲线 C 交于 M, N 两点, 且当直线 MA 的斜率为 1 时, $MF = AF$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 若 $OM \perp ON$, 求 O 到直线 l 的距离.

【解析】

$$(1) \text{ 由 } MF = AF, \text{ 知 } AF \perp MF \Rightarrow \frac{b^2}{a} = a + c,$$

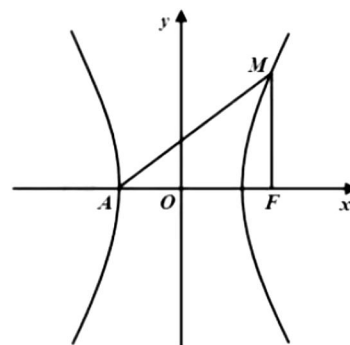
$$\text{而 } \frac{4}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \Rightarrow a = 1, b = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{双曲线 } C \text{ 的方程为 } x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

$$(2) \text{ 设直线 } MN \text{ 的方程为 } y = kx + m,$$

$$M(x_1, y_1), N(x_2, y_2),$$

$$\therefore \begin{cases} y = kx + m \\ 3x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - k^2x^2 - 2kmx - m^2 - 3 = 0,$$



$$(3-k^2)x^2-2kmx-m^2-3=0, \quad 3-k^2 \neq 0 \text{ 且 } \Delta > 0,$$

$$\text{由 } OM \perp ON \Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$$

$$\Rightarrow x_1x_2 + (kx_1+m)(kx_2+m) = 0 \Rightarrow (1+k^2)x_1x_2 + km(x_1+x_2) + m^2 = 0$$

$$\Rightarrow (1+k^2) \cdot \frac{-m^2-3}{3-k^2} + km \cdot \frac{2km}{3-k^2} + m^2 = 0,$$

$$\therefore -m^2-3-k^2m^2-3k^2+2k^2m^2+3m^2-k^2m^2=0, \Rightarrow 2m^2=3k^2+3,$$

$$\therefore O \text{ 到 } l \text{ 的距离 } d = \frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{\frac{m^2}{k^2+1}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

21. (12 分)

全国高中数学联赛试题设置如下：联赛分为一试、加试(即俗称的“二试”)。一试包括 8 道填空题(每题 8 分)和 3 道解答题(分别为 16 分、20 分、20 分)，满分 120 分。二试包括 4 道解答题，涉及平面几何、代数、数论、组合四个方面。前两道题每题 40 分，后两道题每题 50 分，满分 180 分。

已知某一数学竞赛选手在一试中每道填空题能够正确解答的概率均为 $\frac{4}{5}$ ，每道解答题能够正确解答的概率均为 $\frac{3}{5}$ ，在二试中前两道每题能够正确解答的概率均为 $\frac{3}{5}$ ，后两道每题能够正确解答的概率均为 $\frac{2}{5}$ ，假设每道题答对得满分，答错得 0 分。

(1) 记该选手在二试中的成绩为 X ，求 $P(X \geq 100)$ ；

(2) 根据该选手所在省份历年的竞赛成绩分布可知，若一试成绩在 100 分(含 100 分)以上的选手，最终获得省一等奖的可能性为 $\frac{9}{10}$ ，一试成绩低于 100 分，最终获得省一等奖的可能性为 $\frac{2}{5}$ 。问该选手最终获得省一等奖的可能性能否达到 $\frac{1}{2}$ ，并说明理由。

(参考数据： $(\frac{4}{5})^8 \approx 0.168$ ， $(\frac{4}{5})^7 \approx 0.21$ ， $(\frac{4}{5})^6 \approx 0.262$)

【解析】

(1) X 的所有可能取值为 100, 130, 140, 180，

$$\therefore P(X=100) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{16}{625}, \quad P(X=130) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times C_2^1 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{108}{625},$$

$$P(X=140)=C_2^1 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{48}{625}, \quad P(X=180)=\left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{36}{625},$$

$$\therefore P(X \geq 100) = \frac{16+108+48+36}{625} = \frac{208}{625}.$$

(2) 一试成绩大于等于 100 分的情况包括

$$\text{前面填空对 6 道, 后面全对 } P_1 = C_8^6 \left(\frac{4}{5}\right)^6 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^7 \cdot \frac{189}{5^4},$$

$$\text{前面填空对 7 道, 后面全对 } P_2 = C_8^7 \left(\frac{4}{5}\right)^7 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^8 \cdot \frac{54}{5^3},$$

$$\text{前面填空全对, 后面也全对 } P_3 = \left(\frac{4}{5}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

$$\text{前面填空全对, 后面错一道 } P_4 = \left(\frac{4}{5}\right)^8 \cdot C_3^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^8 \cdot \frac{54}{5^3},$$

$$\therefore P(X \geq 100) = \left(\frac{4}{5}\right)^7 \frac{189}{625} + \left(\frac{4}{5}\right)^8 \cdot \frac{135}{125} \approx 0.245,$$

$$\therefore P(X < 100) = 1 - 0.245 = 0.755,$$

$$\therefore \text{该选手最终获得一等奖的可能性为 } P = 0.245 \times \frac{9}{10} + 0.755 \times \frac{2}{5} = 0.5225 > \frac{1}{2}, \text{ 可以达到.}$$

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^{x-1} + a(x-1)^2 - x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线过点 $(1, 0)$, 求 a 的值;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极大值, 求 a 的取值范围.

【解析】

$$(1) f'(x) = e^{x-1} + 2a(x-1) - 1, \quad k = f'(0) = \frac{1}{e} - 2a - 1,$$

$$\text{切点} \left(0, \frac{1}{e} + a\right), \therefore \frac{\frac{1}{e} + a}{-1} = \frac{1}{e} - 2a - 1 \Rightarrow a = \frac{2}{e} - 1.$$

$$(2) f'(x) = e^{x-1} + 2a(x-1) - 1, \quad f'(1) = 0, \quad f''(x) = e^{x-1} + 2a, \text{ 显然 } f''(x) \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上 } \nearrow.$$

$$\textcircled{1} \text{ 若 } f''(1) = 1 + 2a > 0, \text{ 即 } a > -\frac{1}{2} \text{ 时,}$$

(i) 若 $a \geq 0$, 则 $f''(x) > 0, f'(x) \nearrow$, 此时当 $x < 1$ 时, $f'(x) < 0, f(x) \searrow$; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0, f(x) \nearrow$, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取极小值, 舍去.

(ii) 当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, 注意到 $f''\left(1 + \frac{1}{2a}\right) < 0$, 此时 $f''(x)$ 在 $\left(1 + \frac{1}{2a}, 1\right)$ 上有唯一的零点 x_0 , 且当 $x_0 < x < 1$ 时, $f''(x) < 0, f'(x) \searrow$; 当 $x > 1$ 时, $f''(x) > 0, f'(x) \nearrow$, $\therefore f'(x) \geq f'(1) = 0$, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上 \nearrow , 不符合题意, 舍去.

② 当 $f''(1) = 1 + 2a = 0$ 时, 即 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 可得 $f'(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上 \searrow , $(1, +\infty)$ 上 \nearrow , 此时 $f'(x) \geq f'(1) = 0$, 也舍去.

③ 当 $f''(1) = 1 + 2a < 0$, 即 $a < -\frac{1}{2}$ 时, 而 $f''(-2a) > 0$, \therefore 存在唯一的 $x_1 \in (1, -2a)$ 使 $f''(x_1) = 0$, 且当 $x < x_0$ 时, $f''(x) < 0, f'(x) \searrow$, 注意到 $f'(1) = 0$, \therefore 当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0, f(x) \nearrow$; 当 $1 < x < x_0$ 时, $f'(x) < 0, f(x) \searrow$, $\therefore f(x)$ 在 $x = 1$ 处有极大值, 符合题意.

综上: a 取值范围为 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.