

2021 年高考针对性训练

数学试题参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	C	C	D	C	B	A

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	AD	AC	ABC	BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 2; 14. 甲; 15. $\frac{\pi}{3}$; 16. $(-\infty, 0]$.

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 【解析】

(1) ①③④

(2) 【方法一】

因为 $\cos A = \frac{1}{2}$ ，所以 $A = 60^\circ$ ，

又因为 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，且 $a = \sqrt{3}$ ， $b = 1$ ，

所以 $\sin B = \frac{1}{2}$ ，所以 $B = 30^\circ$ ，所以 $C = 90^\circ$ ，

所以 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$ 。

【方法二】

因为 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ，且 $\cos A = \frac{1}{2}$ ， $a = \sqrt{3}$ ， $b = 1$ ，

所以 $c^2 - c - 2 = 0$ ，

所以 $c = 2$ 。

18. 【解析】

(1) 设等差数列的首项为 a_1 ，公差 d ，

因为 $a_2 = 4$, $S_5 = 30$,

$$\text{所以 } \begin{cases} a_1 + d = 4 \\ a_1 + 2d = 6 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 2 \end{cases},$$

所以 $a_n = 2n$.

$$(2) b_n = \frac{2}{a_n^2 - 1} = \frac{2}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } T_n &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}. \end{aligned}$$

19. 【解析】

(1) 证明: 由题意可知, $\triangle ADE, \triangle ABE, \triangle BCE$ 均为全等的等边三角形;

分别过点 C, D 作 $CM \perp BE, DN \perp AE$, 连接 CD, MN ,

则 M, N 分别为 BE, AE 的中点, 所以 $CM = DN$.

因为 平面 $BCE \perp$ 平面 ABE , 平面 $BCE \cap$ 平面 $ABE = BE$,

所以 $CM \perp$ 平面 ABE ;

同理 $DN \perp$ 平面 ABE ; 所以 $CM \parallel DN$.

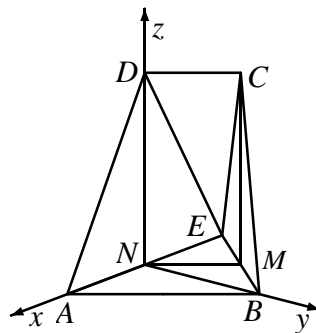
所以 四边形 $CDNM$ 为平行四边形,

所以 $CD \parallel MN$;

又因为 M, N 分别为 BE, AE 的中点,

所以 $MN \parallel AB$;

所以 $AB \parallel CD$.



(2) 连接 BN , 则 $BN \perp AE$, 由 (1) 可知 $DN \perp$ 平面 ABE , 所以 $DN \perp BN$;

以 N 为坐标原点, NA, NB, ND 分别为 x, y, z 轴正方向建立空间直角坐标系,

设 $AB = 2$, 则 $N(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, \sqrt{3}, 0), M(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$;

因为 $BN \perp AE$, $DN \perp BN$, $DN \cap AE = N$,

所以 $BN \perp$ 平面 ADE ,

所以 $\overrightarrow{NB} = (0, \sqrt{3}, 0)$ 为平面 ADE 的法向量;

同理 $\overrightarrow{MA} = (\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ 为平面 BCE 的法向量;

设二面角 $D-l-C$ 的平面角为 θ , 由图可知, 该角为锐角,

$$\text{所以 } \cos \theta = \frac{|\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{NB}| |\overrightarrow{MA}|} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{2},$$

所以 二面角 $D-l-C$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

20. 【解析】

(1) 证明: 因为 $f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$,

$$\text{所以 } f_3'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} > 0,$$

所以 $f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ 在 \mathbf{R} 上单调递增;

$$\text{又因为 } f_3(-2) = -\frac{1}{3} < 0, \quad f_3(0) = 1 > 0;$$

所以 $f_3(x)$ 有唯一零点.

(2) 因为 $f_{2n}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

$$\text{所以 } f_{2n}'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = f_{2n-1}(x),$$

又因为 $f_{2n-1}(x)$ 单调递增且有唯一零点, 设其零点为 x_n ,

则当 $x \in (-\infty, x_n)$ 时, $f_{2n-1}(x) < 0$, 当 $x \in (x_n, +\infty)$ 时, $f_{2n-1}(x) > 0$;

所以 $f_{2n}(x)$ 在 $(-\infty, x_n)$ 上单调递减, 在 $(x_n, +\infty)$ 上单调递增;

$$\text{所以 } f_{2n}(x)_{\min} = f_{2n}(x_n) = f_{2n-1}(x_n) + \frac{x_n^{2n}}{(2n)!},$$

因为 $f_{2n-1}(x_n) = 0$,

$$\text{所以 } f_{2n}(x) \geq f_{2n}(x_n) = f_{2n-1}(x_n) + \frac{x_n^{2n}}{(2n)!} = \frac{x_n^{2n}}{(2n)!} > 0,$$

所以 $f_{2n}(x)$ 的零点个数为 0.

21. 【解析】

(1) 由题意知 $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

又椭圆 C 经过点 $H(-2, 1)$, 所以 $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$;

解得 $a^2 = 6, b^2 = 3$,

所以 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 证明: 设直线 AB 方程为 $x = my - 3$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} x = my - 3 \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 联立消元得 $(m^2 + 2)y^2 - 6my + 3 = 0$,

所以 $\Delta = 36m^2 - 12(m^2 + 2) > 0$, $y_1 + y_2 = \frac{6m}{m^2 + 2}$, $y_1 y_2 = \frac{3}{m^2 + 2}$,

由题意知, y_1, y_2 均不为 1.

设 $M(x_M, 0), N(x_N, 0)$,

由 H, M, A 三点共线知 \overrightarrow{AM} 与 \overrightarrow{MH} 共线,

所以 $x_M - x_1 = (-y_1)(-2 - x_M)$, 化简得 $x_M = \frac{x_1 + 2y_1}{1 - y_1}$;

由 H, N, B 三点共线, 同理可得 $x_N = \frac{x_2 + 2y_2}{1 - y_2}$;

由 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PG}$, 得 $(x_M + 3, 0) = \lambda(1, 0)$, 即 $\lambda = x_M + 3$;

由 $\overrightarrow{PN} = \mu \overrightarrow{PG}$, 同理可得 $\mu = x_N + 3$;

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} &= \frac{1}{x_M + 3} + \frac{1}{x_N + 3} = \frac{1}{\frac{x_1 + 2y_1}{1 - y_1} + 3} + \frac{1}{\frac{x_2 + 2y_2}{1 - y_2} + 3} \\ &= \frac{1 - y_1}{x_1 - y_1 + 3} + \frac{1 - y_2}{x_2 - y_2 + 3} = \frac{1 - y_1}{(m - 1)y_1} + \frac{1 - y_2}{(m - 1)y_2} \\ &= \frac{1}{m - 1} \left(\frac{1 - y_1}{y_1} + \frac{1 - y_2}{y_2} \right) = \frac{1}{m - 1} \left(\frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} - 2 \right) = \frac{1}{m - 1} \left(\frac{\frac{6m}{m^2 + 2}}{\frac{3}{m^2 + 2}} - 2 \right) = 2, \end{aligned}$$

所以 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ 为定值.

22. 【解析】

(1) (i) 因为 $k=2$ ，所以 控制系统中正常工作的元件个数 X 的可能取值为 $0, 1, 2, 3$ ；

因为 每个元件的工作相互独立，且正常工作的概率均为 $p = \frac{2}{3}$ ，

所以 $X \sim B(3, \frac{2}{3})$ ，

所以 $P(X=0) = C_3^0 (\frac{2}{3})^0 (\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$ ，

$P(X=1) = C_3^1 (\frac{2}{3})^1 (\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9}$ ，

$P(X=2) = C_3^2 (\frac{2}{3})^2 (\frac{1}{3})^1 = \frac{4}{9}$ ，

$P(X=3) = C_3^3 (\frac{2}{3})^3 (\frac{1}{3})^0 = \frac{8}{27}$ ，

所以 控制系统中正常工作的元件个数 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

控制系统中正常工作的元件个数 X 的数学期望为 $E(X) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$ ；

(ii) 由题意知：

$$P_3 = C_5^3 (\frac{2}{3})^3 (\frac{1}{3})^2 + C_5^4 (\frac{2}{3})^4 (\frac{1}{3})^1 + C_5^5 (\frac{2}{3})^5 (\frac{1}{3})^0$$

$$= \frac{80}{243} + \frac{80}{243} + \frac{32}{243} = \frac{192}{243} = \frac{64}{81}；$$

(2) 升级改造后单位时间内产量的分布列为

产量	$4a$	0
设备运行概率	p_k	$1 - p_k$

所以 升级改造后单位时间内产量的期望为 $4ap_k$ ；

所以

产品类型	高端产品	一般产品
产量（单位：件）	ap_k	$3ap_k$
利润（单位：元）	2	1

设备升级后单位时间内的利润为

$$y = 2ap_k + 3ap_k = 5ap_k, \text{ 即 } y = 5ap_k;$$

因为 控制系统中元件总数为奇数，若增加 2 个元件，则

第一类：原系统中至少有 $k+1$ 个元件正常工作，其概率为

$$p(1) = p_k - C_{2k-1}^k p^k (1-p)^{k-1};$$

第二类：原系统中恰好有 k 个元件正常工作，新增 2 个元件中至少有 1 个正常工作，其概率为

$$p(2) = C_{2k-1}^k p^k (1-p)^{k-1} \cdot [1 - (1-p)^2] = C_{2k-1}^k p^{k+1} (1-p)^{k-1} (2-p);$$

第三类：原系统中有 $k-1$ 个元件正常工作，新增 2 个元件全部正常工作，其概率为

$$p(3) = C_{2k-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^k \cdot p^2 = C_{2k-1}^{k-1} p^{k+1} (1-p)^k;$$

$$\text{所以 } p_{k+1} = p_k - C_{2k-1}^k p^k (1-p)^{k-1} + C_{2k-1}^k p^{k+1} (1-p)^{k-1} (2-p) + C_{2k-1}^{k-1} p^{k+1} (1-p)^k$$

$$= p_k + C_{2k-1}^k p^k (1-p)^k (2p-1),$$

$$\text{即 } p_{k+1} - p_k = C_{2k-1}^k p^k (1-p)^k (2p-1),$$

所以 当 $p > \frac{1}{2}$ 时， $p_{k+1} - p_k > 0$ ， p_k 单调递增，

即增加元件个数设备正常工作的概率变大，

当 $p \leq \frac{1}{2}$ 时， $p_{k+1} - p_k \leq 0$ ，

即增加元件个数设备正常工作的概率没有变大，

又因为 $y = 5ap_k$ ，

所以 当 $p > \frac{1}{2}$ 时，设备可以通过增加控制系统中元件的个数来提高利润；

当 $p \leq \frac{1}{2}$ 时，设备不可以通过增加控制系统中元件的个数来提高利润。