

江苏省仪征中学 2017-2018 学年第一学期高三期末复习专题

——数列中的奇偶项问题

陈宏强

一、热身练习：

- 1、已知等差数列 $\{a_n\}$ 的项数为奇数，且奇数项和为44，偶数项和为33，则数列的中间项为_____；项数为_____.
- 2、定义“等和数列”：在一个数列中，如果每一项与它的后一项的和都为同一个常数，那么这个数列叫作等和数列，这个常数叫作数列的公和. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等和数列，且 $a_1=2$ ，公和为5，那么 a_{18} 的值为_____，这个数列的前 n 项和 S_n 的计算公式为_____.
- 3、数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n ， $a_1=1$ ， $a_2=2$ ， $a_{n+2}-a_n=1+(-1)^n$ ， $n\in\mathbf{N}^*$ ，则 $S_{100}=\underline{\hspace{2cm}}$.
- 4、设数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$ ，且满足 $a_{2n+1}=2a_{2n-1}$ 与 $a_{2n}=a_{2n-1}+1$ ，则 $S_{20}=\underline{\hspace{2cm}}$.
- 5、已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=1, a_2=0$ ，若对任意的正整数 m 和 n ($n>m$) 满足： $a_n^2 - a_m^2 = a_{n-m} \cdot a_{n+m}$ ，则 $a_{119}=\underline{\hspace{2cm}}$.

二、典例研究：

题型一、等差等比奇偶项问题

1、已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，其前12项和为354，在前12项中，偶数项之和与奇数项之和的比为 $\frac{32}{27}$ ，则这个数列的公差为_____.

题型二、数列中连续两项和或积的问题 ($a_n + a_{n+1} = f(n)$ 或 $a_n \cdot a_{n+1} = f(n)$)

1、若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_n + a_{n+1} = 4n$, 则数列 $\{a_{2n-1}\}$ 的前 n 项和是_____.

问: 可否求 a_n ?

2、已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_n \cdot a_{n+1} = (\frac{1}{2})^n$, 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和, $b_n = a_{2n} + a_{2n-1}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列, 并求出 b_n ; (3) 求 S_n .

题型三、含有 $(-1)^n$ 类型

1、数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1$ ，则的前 60 项和为_____.

2、已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_n = (-1)^n a_n - \frac{1}{2^n}$ ， $n \in N^*$ ，

则 $S_1 + S_2 + S_3 + \dots S_{100} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3、已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -1$ ， $a_2 = 1$ ，且 $a_{n+2} = \frac{2 + (-1)^n}{2} a_n (n \in N^*)$.

(1)求 $a_5 + a_6$ 的值； (2)设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和，求 S_n .

题型四、含有 $\{a_{2n}\}$ 、 $\{a_{2n-1}\}$ 类型

1、已知 $n \in \mathbf{N}^*$ ，数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，前 n 项和为 S_n ，且 $a_1 = 1, a_2 = 2$ ，设 $b_n = a_{2n-1} + a_{2n}$ 。

(1) 若数列 $\{b_n\}$ 是公比为 3 的等比数列，求 S_{2n} ；

(2) 若 $S_{2n} = 3(2^n - 1)$ ，数列 $\{a_n a_{n+1}\}$ 也为等比数列，求数列的 $\{a_n\}$ 通项公式。

2、已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{2n+1} = a_{2n-1} + 2, a_{2n+2} = 3a_{2n}, (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式； (2) 若 $a_m a_{m+1} = a_{m+2}$ ，求正整数 m 的值。

题型五、已知条件明确奇偶项问题

1、已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n + 3n, & n \text{ 为奇数} \\ -a_n - n - 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,

$$b_n = a_{2n}, n \in \mathbf{N}^*.$$

(1)求证: 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 并求其通项 b_n ;

(2)求 S_n ;

(3)问是否存正整数 n , 使得 $S_{2n+1} > b_n > S_{2n}$ 成立? 说明理由.

2、设正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n = \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{2}a_n$ ， $n \in N^*$ $n \in N^*$. 正项等比数列 $\{b_n\}$ 满

足： $b_2 = a_2$ ， $b_4 = a_6$ ，

(1)求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $c_n = \begin{cases} a_n, n = 2k - 1 \\ b_n, n = 2k (k \in N^*) \end{cases}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求所有正整数 m 的值，使得 $\frac{T_{2n}}{T_{2n-1}}$ 恰

好为数列 $\{c_n\}$ 中的项.

三、巩固训练：

- 1、已知 $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + (-1)^{n-1} n$ ，则 $S_{17} + S_{33} + S_{50} =$ _____.
- 2、等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为1，项数为偶数，且奇数项和为85，偶数项和为170，则数列的项数为 _____.
- 3、若数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1$ ， $a_n a_{n+1} = 4^n$ ，则 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和是 _____.
- 4、已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + a_n = 4n - 3 (n \in N^*)$.
 - (1) 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，求 a_1 的值；
 - (2) 当 $a_1 = 2$ 时，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

5、已知数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数， $a_1=1, a_2=2$ ，且 $a_n a_{n+3} = a_{n+1} a_{n+2}$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立，记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 。

(1)若 $a_3=3$ ，求 a_5 的值；

(2)证明：对任意正实数 p ， $\{a_{2n} + pa_{2n+1}\}$ 成等比数列；(3)是否存在正实数 t ，使得数列 $\{S_n + t\}$ 为等比数列。若存在，求出此时 a_n 和 S_n 的表达式；若不存在，说明理由。

6、在数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 中，已知 $a_1=0, a_2=1, b_1=1, b_2=\frac{1}{2}$ ，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，且满足 $S_n + S_{n+1} = n^2$ ， $2T_{n+2} = 3T_{n+1} - T_n$ ，其中 n 为正整数。

(1)求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式；(2)问是否存在正整数 m, n ，使 $\frac{T_{n+1} - m}{T_n - m} > 1 + b_{m+2}$ 成立？若存在，求出所有符合条件的有序实数对 (m, n) ，若不存在，请说明理由。

7、已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{3}a_n + n & (n \text{ 为奇数}) \\ a_n - 3n & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$, 设 $b_n = a_{2n} - \frac{3}{2}$.

(1)证明数列 $\{b_n\}$ 是等比数列; (2)若 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和, 求 S_{2n} ; (3)探求满足 $S_n > 0$ 的所有正整数 n .