

2019 年全国高中数学联赛（四川预赛）试题

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分.

1. 设正六边形 $ABCDEF$ 的边长为1, 则 $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE}) =$ _____.

2. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点为 F , 离心率为 e , 过点 F 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线与该双曲线交于点 A 、 B , 若 AB 的中点为 M , 且 $|FM|$ 等于半焦距, 则 $e =$ _____.

3. 满足 $(a + bi)^6 = a - bi$ (其中 $a, b \in \mathbf{R}, i^2 = -1$) 的有序数组 (a, b) 的组数是_____.

4. 已知正四棱锥 Γ 的高为3, 侧面与底面所成角为 $\frac{\pi}{3}$. 先在 Γ 内放入一个内切球 O_1 , 然后依次放入球 O_2 、 O_3 、 O_4 、..., 使得后放入的各球均与前一个球及 Γ 的四个侧面均相切, 则放入所有球的体积之和为_____.

5. 设一个袋子里有红、黄、蓝色小球各一个, 现每次从袋子里取出一个球 (取出某色球的概率均相同), 确定颜色后放回, 直到连续两次均取出红色球时为止, 记此时取出球的次数为 ζ , 则 ζ 的数学期望为_____.

6. 已知 a 为实数, 且对任意 $k \in [-1, 1]$, 当 $x \in (0, 6]$ 时, $6\ln x + x^2 - 8x + a \leq kx$ 恒成立, 则 a 的最大值是_____.

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n = [(2 + \sqrt{5})^n + \frac{1}{2^n}] (n \in \mathbf{N}^*)$, 其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数. 设 C 为实数, 且对任意的正整数 n , 都有 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+2}} \leq C$, 则 C 的最小值是_____.

8. 若正整数 n 使得方程 $x^3 + y^3 = z^n$ 有正整数解 (x, y, z) , 称 n 为“好数”. 则不超过2019的“好数”个数是_____.

二、解答题：本大题共3小题，满分56分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. (本题满分16分) 设点 A 的坐标为 $(0, 3)$, 点 B, C 为圆 $O: x^2 + y^2 = 25$ 上的两动点, 满足 $\angle BAC = 90^\circ$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

10. (本题满分20分) 设 $a, b, c \in (0, 1]$, λ 为实数, 使得 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a+b+c}} \geq 1 + \lambda(1-a)(1-b)(1-c)$ 恒成立, 求 λ 的最大值.

11. (本题满分20分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - ax^2$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 证明: 当 $1 < x < 3$ 时, $\frac{f(x) + ax^2 - x + 2}{(3-x)e^x} > \frac{1}{e^2}$;

(2) 设函数 $F(x) = |f(x)| (x \in [1, e])$ 有极小值, 求 a 的取值范围.