

2019 年全国高中数学联赛（四川预赛）试题

参考答案及评分标准

说明：

1、评阅试卷时，请依据评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；第 9 题 4 分一个档次、第 10 题和第 11 题均为 5 分一个档次. 请严格按照评分标准规定的评分档次给分，不要再增加其它中间档次.

2、如果考生的解答题方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评阅时可参考本评分标准评分.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1、-3 2、 $\sqrt{2}$ 3、8 4、 $\frac{18}{13}\pi$ 5、12 6、 $6-6\ln 6$ 7、 $\frac{1}{288}$ 8、1346.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. (本题满分 16 分) 设点 A 的坐标为 $(0, 3)$ ，点 B, C 为圆 $O: x^2 + y^2 = 25$ 上的两动点，满足 $\angle BAC = 90^\circ$ ，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

解：如图，设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ ， $P(x, y)$ 为线段 BC 的中点.

$$\text{则 } x_1^2 + y_1^2 = 25 \quad \textcircled{1}$$

$$x_2^2 + y_2^2 = 25 \quad \textcircled{2}$$

$$x_1 x_2 + (y_1 - 3)(y_2 - 3) = 0 \quad \textcircled{3}$$

$$x_1 + x_2 = 2x, y_1 + y_2 = 2y \quad \textcircled{4}$$

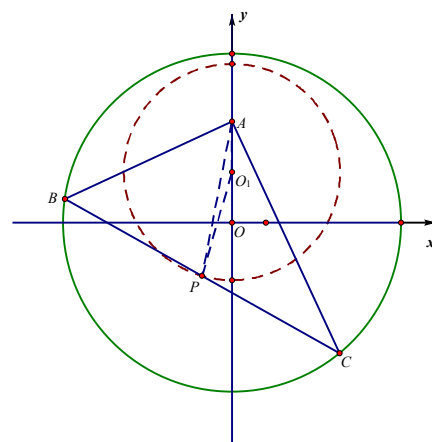
由①、②、③、④可知：

$$x^2 + y^2 - 3y = 8, \text{ 即 } x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = (\frac{\sqrt{41}}{2})^2.$$

所以，线段 BC 的中点 P 的轨迹是 $\odot O_1$ ，其方程为： $x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = (\frac{\sqrt{41}}{2})^2$. ……4 分

于是 $|AP| \leq |AO_1| + |O_1P| = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}$, ……8 分

$$\begin{aligned} \text{从而 } \triangle ABC \text{ 面积 } S &= \frac{1}{2} |AB| \cdot |AC| \leq \frac{1}{4} (|AB|^2 + |AC|^2) = \frac{1}{4} |BC|^2 = |AP|^2 \\ &\leq (\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2})^2 = \frac{25 + 3\sqrt{41}}{2} \end{aligned} \quad \text{……12 分}$$



当点 P 的坐标为 $(0, \frac{3-\sqrt{41}}{2})$ 时, 可取到等号.

所以, $\triangle ABC$ 面积的最大值是 $\frac{25+3\sqrt{41}}{2}$16 分

10. (本题满分 20 分) 设 $a, b, c \in (0, 1]$, λ 为实数, 使得

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a+b+c}} \geq 1 + \lambda(1-a)(1-b)(1-c)$$

恒成立, 求 λ 的最大值.

解: 取 $a=b=c=\frac{1}{4}$ 时, $\lambda \leq \frac{64}{27}$5 分

下证: $\lambda = \frac{64}{27}$ 满足条件, 即证 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a+b+c}} \geq 1 + \frac{64}{27}(1-a)(1-b)(1-c)$

注意到: $(1-a)(1-b)(1-c) \leq (1 - \frac{a+b+c}{3})^3$ 10 分

令 $a+b+c=3x^2$, 其中 $x>0$, 则 $0<x\leq 1$.

只须证 $\frac{1}{x} \geq 1 + \frac{64}{27}(1-x^2)^3$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{x} \geq \frac{64}{27}(1-x)^3(1+x)^3$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{64}{27}x(1-x)^2(1+x)^3 \quad \text{.....15 分}$$

由均值不等式知:

$$x(1-x)^2(1+x)^3 = 27x(1-x)^2\left(\frac{1+x}{3}\right)^3 \leq 27\left(\frac{x+2(1-x)+3(\frac{x+1}{3})}{6}\right)^6 = \frac{27}{64}$$

于是 $\frac{64}{27}x(1-x)^2(1+x)^3 \leq \frac{64}{27} \times \frac{27}{64} = 1$, 故 (*) 成立.

综上所述, λ 的最大值是 $\frac{64}{27}$20 分

11. (本题满分 20 分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - ax^2, a \in \mathbf{R}$.

(1) 证明: 当 $1 < x < 3$ 时, $\frac{f(x) + ax^2 - x + 2}{(3-x)e^x} > \frac{1}{e^2}$;

(2) 设函数 $F(x) = |f(x)|$ ($x \in [1, e]$) 有极小值, 求 a 的取值范围.

解: (1) 设 $g(x) = f(x) + ax^2 - x + 2 = x \ln x - x + 2$,

则 $g'(x) = \ln x$,

当 $1 < x < 3$ 时, $g'(x) > 0$,

因此, $g(x)$ 在 $(1, 3)$ 单调递增,

所以, $g(x) > g(1) = 1$;

设 $h(x) = (3-x)e^x$, 则 $h'(x) = (2-x)e^x$,

当 $1 < x < 2$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $2 < x < 3$ 时, $h'(x) < 0$

因此, $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 单调递增, 在 $(2, 3)$ 单调递减.

所以, $h(x)$ 的最大值为 $h(2) = e^2$, 即 $0 < (3-x)e^x \leq e^2$,

$$\therefore \frac{1}{(3-x)e^x} \geq \frac{1}{e^2} > 0.$$

又因为 $f(x) + ax^2 - x + 2 > 1$,

$$\text{所以 } \frac{f(x) + ax^2 - x + 2}{(3-x)e^x} > \frac{1}{e^2}.$$

……5 分

$$(2) F(x) = |f(x)| = x^2 \left| \frac{\ln x}{x} - a \right|, \quad x \in [1, e]$$

$$\text{令 } t(x) = \frac{\ln x}{x} - a, x \in [1, e], \text{ 则 } t'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

当 $x \in [1, e]$ 时, $t'(x) \geq 0$,

故 $t(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增.

于是 $t(1) \leq t(x) \leq t(e)$, 即 $-a \leq t(x) \leq \frac{1}{e} - a$.

(i) 当 $-a \geq 0$, 即 $a \leq 0$ 时, $t(x) \geq 0$,

于是 $F(x) = x \ln x - ax^2, x \in [1, e]$,

则 $F'(x) = \ln x + 1 - 2ax > 0$, 从而 $F(x)$ 在 $[1, 3]$ 上单调递增,

所以, $F(x)$ 在 $[1, e]$ 上无极值点.

(ii) 当 $\frac{1}{e} - a < 0$, 即 $a > \frac{1}{e}$ 时, $t(x) < 0$,

于是 $F(x) = ax^2 - x \ln x, x \in [1, e]$,

则 $F'(x) = 2ax - \ln x - 1, F''(x) = 2a - \frac{1}{x}$,

因为 $\frac{1}{x} \in [\frac{1}{e}, 1]$,

① 当 $2a \geq 1$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $F''(x) \geq 0$,

故 $F'(x)$ 在 $[1, e]$ 单调递增,

又因为 $F'(1) = 2a - 1 \geq 0$,

故 $F(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增,

所以, $F(x)$ 在 $[1, e]$ 上无极值点.

② 当 $\frac{1}{e} < a < \frac{1}{2}$ 时, 由 $F''(x) = 2a - \frac{1}{x} \geq 0$ 得 $\frac{1}{2a} \leq x \leq e$,

于是 $F'(x)$ 在 $[1, \frac{1}{2a}]$ 单调递减, 在 $[\frac{1}{2a}, e]$ 单调递增.

又因为 $F'(1) = 2a - 1 < 0, F'(e) = 2ae - 2 > 0$,

故 $\exists x_0 \in (1, e)$ 使得 $F'(x_0) = 0$,

因此, $F(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, e]$ 上单调递增,

所以, $F(x)$ 在 $[1, e]$ 上有一个极小值点.

……10 分

(iii) 当 $a = \frac{1}{e}$ 时, $F'(x) = \frac{2}{e}x - \ln x - 1$, 由 $F''(x) = \frac{2}{e} - \frac{1}{x} > 0$ 得 $x > \frac{e}{2}$,

于是 $F'(x)$ 在 $[1, \frac{e}{2}]$ 上单调递减, 在 $[\frac{e}{2}, e]$ 上单调递增,

又 $F'(1) = \frac{2}{e} - 1 < 0, F'(e) = 0$, 从而 $F'(x) \leq 0$ 在 $[1, e]$ 上恒成立,

所以, $F(x)$ 在 $[1, e]$ 上无极值点.

(iv) 当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, 因为 $t(x)$ 在 $[1, e]$ 单调递增,

于是 $\exists x_0 \in (1, e)$, 使得 $\frac{\ln x_0}{x_0} = a$,

因此, 当 $x \in [1, x_0]$ 时, $t(x) \leq 0$, 当 $x \in [x_0, e]$ 时, $t(x) \geq 0$,

$$\text{从而 } F(x) = \begin{cases} ax^2 - x \ln x, & 1 \leq x \leq x_0 \\ x \ln x - ax^2, & x_0 \leq x \leq e \end{cases},$$

$$\text{于是 } F'(x) = \begin{cases} 2ax - 1 - \ln x, & 1 \leq x < x_0 \\ \ln x + 1 - 2ax, & x_0 < x \leq e \end{cases},$$

令 $k(x) = ax^2 - x \ln x, x \in [1, e]$, 则 $k'(x) = 2ax - \ln x - 1$

下面证明 $k'(x) \leq 0$, 即证 $2ax \leq \ln x + 1, 2a \leq \frac{\ln x + 1}{x}$,

$$\text{又 } \left(\frac{\ln x + 1}{x}\right)' = -\frac{\ln x}{x^2} < 0, \text{ 故 } \left(\frac{\ln x + 1}{x}\right)_{\min} = \frac{2}{e}$$

即证 $a \leq \frac{1}{e}$, 所以结论成立, 即 $k'(x) \leq 0$,

注意到 $(1, x_0) \subset [1, e]$, 故 $F(x)$ 在 $[1, x_0]$ 单调递减, 在 $(x_0, e]$ 单调递增.

因此, x_0 为 $F(x)$ 的极小值点.

……15 分

综上所述, 当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 或 $\frac{1}{e} < a < \frac{1}{2}$ 时, $F(x)$ 在 $[1, e]$ 上有极小值点.

……20 分