

苏州市高三第一学期高三期中调研试卷

数 学

2021.11

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的。请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上。

1. 已知集合 $M = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$ ， $N = \{x | \log_2 x \leq 1\}$ ，则 $M \cap N =$

- A. $[-2, 3]$ B. $[-2, 2]$ C. $(0, 2]$ D. $(0, 3]$

【答案】C

【解析】因为 $N = (0, 2]$ ，所以 $M \cap N = (0, 2]$ 。故选 C

2. 若 $a > 0, b > 0$ ，则“ $ab < 1$ ”是“ $a + b < 1$ ”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】若 $ab < 1, a < \frac{1}{b}$ ，所以 $a + b < \frac{1}{b} + b$ ，而 $y = \frac{1}{x} + x (x > 0)$ 无最大值；若

$a + b < 1$ ，则 $a < 1 - b$ ，所以 $ab < b(1 - b) \leq \frac{1}{4} < 1$ ，综上“ $ab < 1$ ”是“ $a + b < 1$ ”的必要不

充分条件，故选 B

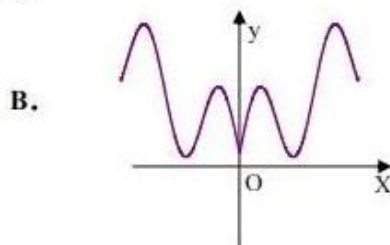
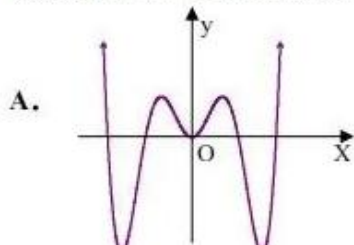
3. 若 $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ ，则 $\frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha} =$

- A. $-\frac{1}{7}$ B. -7 C. $\frac{1}{7}$ D. 7

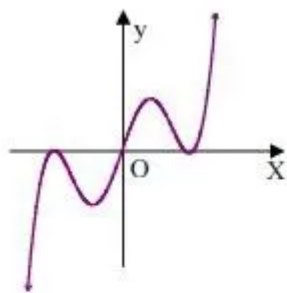
【答案】D

【解析】 $\frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = \frac{\frac{3}{4} + 1}{1 - \frac{3}{4}} = 7$ 。

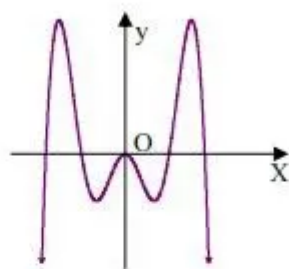
4. 函数 $f(x) = (3x - x^3) \sin x$ 的部分图象大致为



C.



D.

**【答案】A****【解析】**易知函数 $f(x) = (3x - x^3)\sin x$ 为偶函数，排除 C，当 $x \in (0, \sqrt{3})$ 时， $f(x) > 0$ ，排除 D，当 $x \in (\sqrt{3}, \pi)$ 时， $f(x) < 0$ ，排除 B.

5. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形，点 D, E 分别是边 AB, BC 的中点，连结 DE 并延长到点 F ，使得 $DE = 2EF$ ，则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为

A. $-\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{8}$

C. 1

D. -8

【答案】B**【解析】** $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2} \overrightarrow{DE} \right) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2} \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{8}$.

6. 定义方程 $f(x) = f'(x)$ 的实数根 x_0 叫做函数 $f(x)$ 的“躺平点”. 若函数 $g(x) = \ln x$ ， $h(x) = x^3 - 1$ 的“躺平点”分别为 α, β ，则 α, β 的大小关系为

A. $\alpha \geq \beta$

B. $\alpha > \beta$

C. $\alpha \leq \beta$

D. $\alpha < \beta$

【答案】D

注：本题 C 选项也正确.

【解析】由题意， $\ln \alpha = \frac{1}{\alpha}$ ， $\beta^3 - 1 = 3\beta^2$ ，因为 $\begin{cases} \ln 1 < 1 \\ \ln 2 > \frac{1}{2} \end{cases}$ ，所以 $1 < \alpha < 2$ ，因为 $\begin{cases} 3^3 - 1 < 3 \cdot 3^2 \\ 4^3 - 1 > 3 \cdot 4^2 \end{cases}$ ，所以 $3 < \beta < 4$ ，即 $\alpha < \beta$.

7. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$ ($A > 0, \omega > 0$)，直线 $y = 1$ 与 $f(x)$ 的图象在 y 轴右侧交点的横坐标

依次为 $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots$ ，(其中 $k \in \mathbb{N}^*$)，若 $\frac{a_{2k+1} - a_{2k}}{a_{2k} - a_{2k-1}} = 2$ ，则 $A =$

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B. 2

C. $\sqrt{2}$

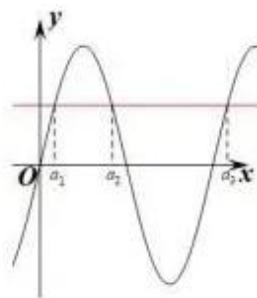
D. $2\sqrt{3}$

【答案】B

解：考察函数 $y = A \sin \omega x$ 即可

如图， $\begin{cases} a_3 - a_1 = T \\ a_3 - a_2 = 2(a_2 - a_1) \end{cases} \Rightarrow a_2 - a_1 = \frac{T}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{\frac{T}{2} - \frac{T}{3}}{2} = \frac{T}{12}$

则 $\frac{1}{A} = \frac{\sin(2\pi \times \frac{T}{12})}{1}$ ，得： $A = 2$ ，故选B.



8. 设数列 $\{a_m\}$ ($m \in \mathbb{N}^*$)，若存在公比为 q 的等比数列 $\{b_{m+1}\}$ ($m \in \mathbb{N}^*$)，使得 $b_k < a_k < b_{k+1}$ ，其中

$k = 1, 2, \dots, m$ ，则称数列 $\{b_{m+1}\}$ 为数列 $\{a_m\}$ 的“等比分割数列”，则下列说法错误的是

A. 数列 $\{b_5\}$ ：2, 4, 8, 16, 32 是数列 $\{a_4\}$ ：3, 7, 12, 24 的一个“等比分割数列”

B. 若数列 $\{a_n\}$ 存在“等比分割数列” $\{b_{n+1}\}$ ，则有 $a_1 < \dots < a_{k-1} < a_k < \dots < a_n$ 和 $b_1 < \dots < b_{k-1}$

$< b_k < \dots < b_n < b_{n+1}$ 成立，其中 $2 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}^*$

C. 数列 $\{a_3\}$ ：-3, -1, 2 存在“等比分割数列” $\{b_i\}$

D. 数列 $\{a_{10}\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$ ($n = 1, 2, \dots, 10$)，若数列 $\{a_{10}\}$ 的“等比分割数列” $\{b_{11}\}$ 的

首项为 1，则公比 $q \in (2, 2^{\frac{10}{9}})$

【答案】C

解：选项A：显然 $2 < 3 < 4 < 7 < 8 < 12 < 16 < 24 < 32$ ，符合定义，正确；

选项B：由定义知： $b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < b_3 < \dots < b_k < a_k < b_{k+1} < \dots < b_{n-1} < a_{n-1} < b_n < a_n < b_{n+1}$
故B正确；

选项C：若正确，则 $b_1 < -3 < b_2 < -1 < b_3 < 2 < b_4$

$b_1 < b_2 < 0$ ，则 $q > 0$ ，则 $b_3, b_4 < 0$ ，矛盾，故C错误；

选项D： $1 < 2 < q < 2^2 < q^2 < 2^3 < q^3 < 2^4 < \dots < q^9 < 2^{10} < q^{10}$

解得： $q \in (2, 2^{\frac{10}{9}})$ ，故D正确；

因此，选C.

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分。每小题给出的四个选项中，都

有多个选项是正确的,全部选对的得5分,选对但不全的得2分,选错或不答的得0分.请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

9. 已知实数 a 满足 $\frac{3+ai}{1-i}=2+i$ (i 为虚数单位), 复数 $z=(a+1)+(a-1)i$, 则

- A. z 为纯虚数 B. z^2 为虚数 C. $z+\bar{z}=0$ D. $z\cdot\bar{z}=4$

【答案】ACD

【解析】因为 $\frac{3+ai}{1-i}=2+i$, 所以 $3+ai=(2+i)(1-i)=3-i$, 即 $a=-1$, 所以 $z=-2i$, 即 A 正确, 又 $z^2=(-2i)^2=-4$, $z+\bar{z}=-2i+2i=0$, $z\cdot\bar{z}=-2i\cdot 2i=4$, 即 CD 正确, B 错误.

10. 已知不等式 $x^2+2ax+b-1>0$ 的解集是 $\{x|x\neq d\}$, 则 b 的值可能是

- A. -1 B. 3 C. 2 D. 0

【答案】BC

【解析】由二次方程解集特征可知, $\Delta=4a^2-4(b-1)=0$, 即 $b=a^2+1\geq 1$, 选项中 BC 正确.

11. 关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\cos x|$ 有下述四个结论, 则

- A. $f(x)$ 是偶函数 B. $f(x)$ 的最小值为 -1
C. $f(x)$ 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有 4 个零点 D. $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递增

【答案】ABC

【解析】因为 $f(-x)=\sin|-x|+|\cos(-x)|=\sin|x|+|\cos x|=f(x)$, 即 A 正确;

因为 $\sin|x|+|\cos x|\geq \sin|x|\geq -1$, 当 $x=\frac{3\pi}{2}$ 时, 等式成立, 即 B 正确;

当 $x\in[0, 2\pi]$ 时, $f(x)=0$ 可化为 $|\cos x|=-\sin x\geq 0$, 即 $x\in[\pi, 2\pi]$,

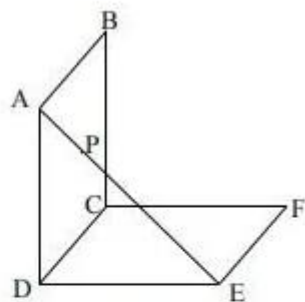
又 $\cos^2 x+\sin^2 x=2\sin^2 x=1$, 解得 $x=\frac{5\pi}{4}$ 或 $x=\frac{7\pi}{4}$, 即 $f(x)=0$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有两个零点,

又 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x)$ 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有四个零点, 即 C 正确;

当 $x\in(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $f(x)=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$,

则 $f(x)$ 在 $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$ 上单调递减, 即 D 错误.

12. 如图, 正方形 $ABCD$ 与正方形 $DEFC$ 边长均为 1, 平面 $ABCD$ 与平面 $DEFC$ 互相垂直, P 是 AE 上的一个动点, 则



12 题图

- A. CP 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 B. 当 P 在直线 AE 上运动时, 三棱锥 $D-BPF$ 的体积不变
 C. $PD+PF$ 的最小值为 $\sqrt{2}-\sqrt{2}$
 D. 三棱锥 $A-DCE$ 的外接球表面积为 3π

【答案】BD

解: 选项A: 连结 DP , CP , 易得 $CP = \sqrt{CD^2 + DP^2} = \sqrt{DP^2 + 1} \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$, 错误;

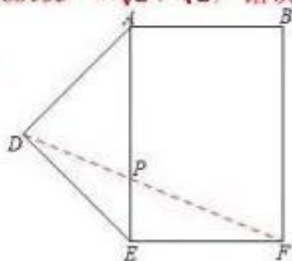
选项B: P 运动过程中, $\triangle BPF$ 的面积不变, D 到平面 BPF 的距离也不变, 故体积不变, 正确;

选项C: 如图, 将 $\triangle ADE$ 翻折到与平面 $ABFE$ 共面

显然当 D, P, F 三点共线时, $PD+PF$ 取等最小值 $\sqrt{1+1-2\cos 135^\circ} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, 错误;

选项D: 将该几何体补成正方体, 易得: $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $S = 4\pi R^2 = 3\pi$,

因此, 选BD.



- 三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 若两个空, 第一个空 2 分, 第二个空 3 分, 共计 20 分. 请把答案填写在答题卡相应位置上.

13. 已知曲线 $y = me^x + x \ln x$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y = 3x + n$, 则 $n =$ _____.

【答案】 -1

【解析】 $f'(x) = me^x + \ln x + 1$, 则 $f'(1) = me + 1 = 3$, 所以 $m = \frac{2}{e}$,

所以 $f(1) = me = 2 = 3 + n$, 即 $n = -1$.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 > 0$, $a_3 + 3a_7 = 0$, 则使 $S_n > 0$ 的最大整数 n 的值为 _____.

【答案】 10

【解析】 因为 $a_3 + 3a_7 = a_3 + a_7 + 2a_7 = 2a_5 + 2a_7 = 4a_6 = 0$, 且 $a_1 > 0$,

所以 $a_{6-n} + a_{6+n} = 0$ ($n=1, 2, 3, 4, 5$), 所以当 $n \leq 10$ 时, $S_n > 0$,

当 $n \geq 11$ 时, $S_n \leq 0$.

15. 某区域规划建设扇形观景水池, 同时紧贴水池周边建设一圈人行步道. 要求总预算费用 24 万元, 水池造价为每平方米 400 元, 步道造价为每米 1000 元 (不考虑宽度厚度等因

素), 则水池面积最大值为_____平方米.

【答案】 400

【解析】 设水池长为 a , 宽为 b , 则由题意, $400ab + 2000(a+b) = 240000$, 即 $ab + 5(a+b) = 600$,

又 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 所以 $ab + 10\sqrt{ab} \leq 600$, 解得 $ab \leq 400$,

当且仅当 $a=b=20$ 时, 等号成立, 即面积最大值为 400.

16. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 且 $f(1-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为_____;

若对任意的 $x_1, x_2 \in [0, \frac{1}{2}]$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > \pi$, 则关于 x 的不等式 $f(x) \leq \sin \pi x$

在区间 $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ 上的解集为_____.

【答案】 2; $[-1, 0] \cup [1, \frac{3}{2}]$

解: 由题意知: $f(x-1) = -f(1-x) = -f(x)$, 则 $f(x-2) = -f(x-1) = f(x)$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 2;

$\forall x_1, x_2 \in [0, \frac{1}{2}]$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > \pi > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 递增

$f(x)$ 为奇函数, 则 $f(x)$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 递增

不妨 $0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{1}{2}$, 则 $f(x_1) - f(x_2) < \pi x_1 - \pi x_2$, 即 $f(x_1) - \pi x_1 < f(x_2) - \pi x_2$

令 $g(x) = f(x) - \pi x$, 即 $g(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上递增, 则 $g(x) \geq g(0) = f(0) = 0$

即 $x \in [0, \frac{1}{2}]$ 时, $f(x) \geq \pi x \geq \sin \pi x$, 当且仅当 $x=0$ 时取等

则 $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$ 时, $f(x) \leq \pi x \leq \sin \pi x$

$f(1-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称

根据 $f(x)$ 和 $y = \sin \pi x$ 的周期性与对称性作图

数形结合可知: $f(x) \leq \sin \pi x$ 在 $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ 上的解集为 $[-1, 0] \cup [1, \frac{3}{2}]$.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共计 70 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知向量 $a = (2\sin x, 2\sin(x + \frac{\pi}{4}))$, 向量 $b = (\cos x, \frac{\sqrt{6}}{2}(\cos x - \sin x))$, 记 $f(x) = a \cdot b (x \in \mathbb{R})$.

(1) 求 $f(x)$ 表达式:

(2) 解关于 x 的不等式 $f(x) \geq 1$.

解: (1) $\because a = (2 \sin x, 2 \sin(x + \frac{\pi}{4}))$, $b = (\cos x, \frac{\sqrt{6}}{2}(\cos x - \sin x))$,

$$\therefore f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \sin x \cos x + 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \frac{\sqrt{6}}{2} (\cos x - \sin x)$$

$$= \sin 2x + 2\sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), \text{ (2) 不等式 } f(x) \geq 1 \text{ 即为}$$

$$2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 1,$$

令 $t = 2x + \frac{\pi}{3}$, 则原不等式可化为 $\sin t \geq \frac{1}{2}$, 于是有

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq t \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 即 } \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 也就是 } -\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

故所求不等式解集为 $\{x | -\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

18. (本小题满分 12 分)

在下列条件: ① 数列 $\{a_n\}$ 的任意相邻两项均不相等, 且数列 $\{a_n^2 - a_n\}$ 为常数列, ②

$S_n = \frac{1}{2}(a_n + n + 1) (n \in \mathbb{N}^*)$, ③ $a_3 = 2$, $S_{n+1} = S_{n-1} + 1 (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$ 中, 任选一个, 补充在横线上, 并回答下面问题.

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 2$, _____.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 和前 n 项和 S_n ;

(2) 设 $b_k = \frac{1}{S_{2k} \cdot S_{2k+1}} (k \in \mathbb{N}^*)$, 数列 $\{b_k\}$ 的前 n 项和记为 T_n , 证明: $T_n < \frac{3}{4} (n \in \mathbb{N}^*)$.

解: (1) 若选①, 因数列 $\{a_n^2 - a_n\}$ 为常数列, 所以有 $a_n^2 - a_n = a_{n+1}^2 - a_{n+1}$, 整理得

$$(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n - 1) = 0, \text{ 因数列 } \{a_n\} \text{ 的任意相邻两项均不相等, 于是有 } a_{n+1} + a_n = 1, (n \in \mathbb{N}^*),$$

所以有 $a_n + a_{n-1} = 1, (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$ 两式相减得 $a_{n+1} = a_{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$, 即有

$$a_1 = a_3, a_2 = a_4, a_3 = a_5, \dots \text{ 又 } a_1 = 2, \text{ 在 } a_n + a_{n-1} = 1, (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*) \text{ 中令 } n=1 \text{ 得 } a_2 = -1, \text{ 即数列 } \{a_n\}:$$

$$2, -1, 2, -1,$$

$$\text{所以 } a_n = \begin{cases} 2, n=2k-1, k \in \mathbb{N}^* \\ -1, n=2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}. \text{ 也可以写成由 } \frac{a_n + 1}{3} = \left| \sin \frac{n\pi}{2} \right| \text{ 得 } a_n = 3 \left| \sin \frac{n\pi}{2} \right| - 1 (n \in \mathbb{N}^*).$$

$$\therefore \text{ 数列 } \{a_n\}: 2, -1, 2, -1, \dots \therefore S_{2k} = k, (k \in \mathbb{N}^*), S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1} = k + 2, (k \in \mathbb{N}^*),$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}, (n=2k, k \in \mathbb{N}^*), S_n = \frac{n+3}{2}, (n=2k+1, k \in \mathbb{N}^*), \text{ 又 } S_1 = a_1 = 2 \text{ 也适合,}$$

$$\text{所以 } S_n = \begin{cases} \frac{n+3}{2}, & n=2k-1, k \in N^* \\ \frac{n}{2}, & n=2k, k \in N^* \end{cases}$$

(2) \because 数列 $\{a_n\}$: 2, -1, 2, -1,

$$\therefore S_{2k} = k, (k \in N^*), S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1} = k+2, (k \in N^*),$$

$$\text{于是 } b_k = \frac{1}{k \cdot (k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) (k \in N^*),$$

$$\therefore T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) < \frac{3}{4}$$

即 $T_n < \frac{3}{4} (n \in N^*)$ 成立.

若选②由 $S_n = \frac{1}{2}(a_n + n + 1) (n \in N^*)$ 得 $S_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + n + 2)$, 两式相减得

$$a_n + a_{n+1} = 1 (n \in N^*), \text{ 所以有 } a_{n-1} + a_n = 1 (n \geq 2, n \in N^*), \text{ 两式相减得 } a_{n+1} = a_{n-1} (n \geq 2, n \in N^*),$$

又 $a_1 = 2$, 所以 $a_2 = -1$, 即数列 $\{a_n\}$: 2, -1, 2, -1, ...

下同上述解法;

若选③由 $S_{n+1} = S_{n-1} + 1 (n \geq 2, n \in N^*)$ 得 $S_n = S_{n-2} + 1 (n \geq 3, n \in N^*)$

两式相减得, 得 $a_{n+1} = a_{n-1} (n \geq 3, n \in N^*)$, 即有 $a_2 = a_4, a_3 = a_5, \dots$

又由 $S_{n+1} = S_{n-1} + 1 (n \geq 2, n \in N^*)$ ①得 $a_n + a_{n+1} = 1 (n \geq 2, n \in N^*)$, 当 $n=2$ 时 $a_2 + a_3 = 1$, 又 $a_3 = 2$,

得 $a_2 = -1$, 又 $a_1 = 2$, 即数列 $\{a_n\}$: 2, -1, 2, -1, ...

下同上述解法.

19. (本小题满分 12 分)

在等腰直角三角形 ABC 中, 已知 $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D, E 为分别在边 AB, BC 上, $CD = 4$.

(1) 若 D 为 AB 的中点, 三角形 CDE 的面积为 4, 求证: E 为 CB 的中点;

(2) 若 $BD = 2AD$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解: (1) \because 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 为 AB 中点, $CD = 4$,

$$\therefore CD = DB = 4, \angle CDB = 90^\circ, CB = 4\sqrt{2},$$

\because 三角形 CDE 的面积为 4, $\therefore \frac{1}{2} CD \cdot CE \sin \angle DCE = 4$, $\angle DCE = 45^\circ$,

$$\text{即: } \frac{1}{2} \times 4 \times CE \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4, \text{ 解得 } CE = 2\sqrt{2}, \text{ 又 } CB = 4\sqrt{2}.$$

$\therefore E$ 为 CB 中点.

(2) 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BD = 2AD$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB},$$

$$\because CD = 4, \text{ 将上式两边平方得 } 16 = \frac{4}{9}CA^2 + \frac{1}{9}CB^2, \text{ 解得 } CA^2 = \frac{144}{5}, \text{ 故 } \frac{1}{2}CA^2 = \frac{72}{5}$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{72}{5}.$$

20. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AC = 2$, $BC = CD = 1$, $\angle CAD = 30^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$,

M 是 PB 上一点, 且 $PB = 3MB$, N 是 PC 中点.

(1) 求证: $PC \perp BD$;

(2) 若二面角 $P-BC-A$ 大小为 45° , 求棱锥 $C-AMN$ 的体积.

解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 2$, $BC = 1$, $\angle ACB = 60^\circ$,

由余弦定理得, $AB = \sqrt{3}$, 所以有 $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$

在 $\triangle ACD$ 中, $AC = 2$, $CD = 1$, $\angle CAD = 30^\circ$. 由正弦定理得,

$\angle ADC = 90^\circ$, 所以有 $AD = \sqrt{3}$, 于是有 $\angle BAD = 60^\circ$. 连结 BD ,

则三角形 ABD 为正三角形, 所以 $\angle ABD = 60^\circ$, 又 $\angle BAC = 30^\circ$, 所以 $AC \perp BD$.

又因 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$. 所以 $PA \perp BD$, 又 AC, PA 是平面 PAC 内两相交直线, 所以有 $BD \perp$ 面 PAC , 又 $PC \subset$ 平面 PAC , 所以 $BD \perp PC$.

(2) 由 (1) 知 $\angle ABC = 90^\circ$, 又 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA \perp BC$, 又 PA, AB 是平面 PAB 内两相交直线, 所以 $BC \perp$ 平面 PAB ,

$PB \subset$ 平面 PAB , 所以 $BC \perp PB$,

所以 $\angle PBA$ 即为二面角 $P-BC-A$ 的平面角,

因二面角 $P-BC-A$ 大小为 45° , 所以 $\angle PBA = 45^\circ$,

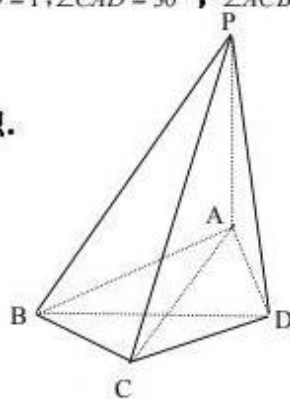
由 $AB = \sqrt{3}$, 又 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA \perp AB$ 知 $PA = \sqrt{3}$, $PB = \sqrt{6}$, 所以 $S_{\triangle PBC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

因 $PB = 3MB$, 所以 $S_{\triangle PMC} = \frac{2}{3}S_{\triangle PBC} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

又因 N 为 PC 中点, 所以 $S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2}S_{\triangle PMC} = \frac{\sqrt{6}}{6}$,

由 $V_{P-ABC} = V_{A-PBC}$, 设 A 到平面 PBC 的距离为 h , 则 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times 1 \times h$,



20 题图

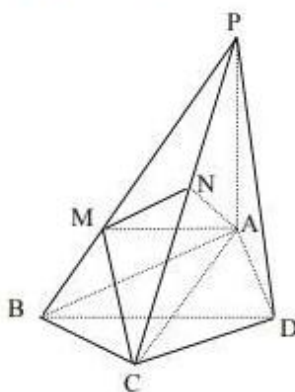


图 2

解得 $h = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，也就是 A 到平面 CMN 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，（也可以在平面 PAB 内，过 A 作 $AH \perp PB$ ，

H 为垂足，由 (1) 知 $BC \perp$ 平面 PAB ，

$BC \subset$ 平面 PBC ，所以面 $PAB \perp$ 面 PBC ，则 $AH \perp$ 面 PBC ，所以 $h = AH = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ）

又 $S_{\triangle CMN} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ ，所以三棱锥 $C-AMN$ 的体积 $V_{C-AMN} = V_{A-CMN} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{6} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{6}$ 。

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ax - \frac{1}{x} - a \ln x$ ($a > 0$)。

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)，且不等式 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \frac{m}{x_1 x_2}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围。

解：函数 $f(x) = ax - \frac{1}{x} - a \ln x$ ($a > 0$) 定义域为 $(0, +\infty)$ ，

(1) 因为函数 $f(x) = ax - \frac{1}{x} - a \ln x$ ，所以 $f'(x) = a + \frac{1}{x^2} - \frac{a}{x} = \frac{ax^2 - ax + 1}{x^2}$ ，

因为 $a > 0$ ，令 $f'(x) = 0$ ，即 $ax^2 - ax + 1 = 0$ 。 $\Delta = a^2 - 4a$

①若 $\Delta = a^2 - 4a \leq 0$ ，即 $0 < a \leq 4$ 时， $ax^2 - ax + 1 \geq 0$ ，所以 $f'(x) \geq 0$ 恒成立， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，

②若 $\Delta = a^2 - 4a > 0$ ，即 $a > 4$ 时，设 $ax^2 - ax + 1 = 0$ 两根为 x_1, x_2 ，由 $x_1 + x_2 = 1, x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{a} > 0$ ，知

$ax^2 - ax + 1 = 0$ 有两不等正根 x_1, x_2 ，不妨设 $0 < x_1 < x_2$ ，则 $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2a}, x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2a}$ ，列表如下：

下：

x	$(0, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	正	0	负	0	正
$f(x)$	单调增		单调减		单调增

$\therefore f(x)$ 的增区间为 $(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2a})$ 和 $(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2a}, +\infty)$ ，减区间为 $(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2a}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2a})$ 。

综上所述：

当 $0 < a \leq 4$ 时， $f(x)$ 的增区间为 $(0, +\infty)$ ；当 $a > 4$ 时， $f(x)$ 的增区间为 $(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2a})$ 和

$(\frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2a}, +\infty)$ ，减区间为 $(\frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2a}, \frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2a})$ 。

(2) 因为 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ ，所以 $f'(x) = 0$ ，即 $ax^2 - ax + 1 = 0$ 有两不等正根 x_1, x_2 ，

因为 $a > 0$ ，记两不等正根 x_1, x_2 ，则有 $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{a} > 0 \\ x_1 + x_2 = 1 > 0 \\ \Delta = a^2 - 4a > 0 \end{cases}$ ，解得 $a > 4$ 。

另一方面当 $a > 4$ 时，令 $f'(x) = 0$ ，即 $ax^2 - ax + 1 = 0$ ，此时 $\Delta = a^2 - 4a > 0$ ， $x_1 + x_2 = 1, x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{a} > 0$ 所

以方程有两个不等正根 x_1, x_2 ，记 $x_1 = \frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2a}, x_2 = \frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2a}$ ，列表如下：

x	$(0, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	正	0	负	0	正
$f(x)$	单调增		单调减		单调增

由上表可知，此时 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ ，符合题意，故实数 $a > 4$ ，

由 $x_1 + x_2 = 1, x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{a} > 0$ 得：

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{1}{2}(a(x_1 + x_2) - \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} - a \ln(x_1 \cdot x_2)) = \frac{1}{2}a \ln a, \quad f(\frac{x_1 + x_2}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}a - 2 + a \ln 2,$$

故 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f(\frac{x_1 + x_2}{2}) + \frac{m}{x_1 x_2}$ 可化为 $m < \frac{1}{2} \ln a + \frac{2}{a} - \frac{1}{2} - \ln 2$ ，

$$\text{令 } g(a) = \frac{1}{2} \ln a + \frac{2}{a} - \frac{1}{2} - \ln 2 (a > 4),$$

$$g'(a) = \frac{1}{2a} - \frac{2}{a^2} = \frac{a-4}{2a^2} > 0 (\because a > 4), \quad g(a) = \frac{1}{2} \ln a + \frac{2}{a} - \frac{1}{2} - \ln 2 \text{ 在 } (4, +\infty) \text{ 上单调递增,}$$

$g(a) > g(4) = 0$ ，故 $m \leq 0$ ，所以实数 m 的取值范围 $(-\infty, 0]$ 。

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - x + 2 \sin x$ ， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，求证：

(1) $f'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在唯一零点；

(2) $f(x)$ 有且仅有两个不同的零点。

解：(1) $\because f(x) = \ln x - x + 2 \sin x$ ，定义域为 $(0, +\infty)$ ，

$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} - 1 + 2\cos x$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2\sin x$, 当 $x \in (0, \pi)$ 时, $\sin x > 0$, 所以

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2\sin x < 0$, $f'(x)$ 在 $x \in (0, \pi)$ 上单调递减,

又由 $f'(\pi) = \frac{1}{\pi} - 3 < 0$, $f'(1) = 2\cos 1 > 0$, 由零点存在定理知 $f'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在唯一零点.

(2) 先证 $\ln x \leq x - 1 (x > 0)$, 记 $g(x) = \ln x - x + 1$, $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

所以 $g(x)_{\max} = g(1) = 0$, 所以 $g(x) \leq 0$ 成立, 即 $\ln x \leq x - 1 (x > 0)$ 结论成立.

①由 (1) 知 $f'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在唯一零点, 记为 x_0 , 则 $x_0 \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$,

由 $f'(x)$ 在 $x \in (0, \pi)$ 上单调递减知 $x \in (0, x_0)$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$x \in (x_0, \pi)$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

因 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 1 = \ln \frac{\pi}{6} - \left(\frac{\pi}{6} - 1\right) < 0$ (因为 $\ln x \leq x - 1$), $f(\pi) = \ln \pi - \pi < 0$,

$f(1) = \ln 1 - 1 + 2\sin 1 = 2\sin 1 - 1 > \sqrt{2} - 1 > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$ 和 $(1, \pi)$ 上各有一个零点.

故 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有两个不同的零点.

②当 $x \in [\pi, 2\pi]$ 时, $\sin x \leq 0$, 因为 $\ln x \leq x - 1$, 所以 $f(x) = \ln x - x + 2\sin x \leq -1 < 0$;

③当 $x \in (2\pi, +\infty)$ 时, $\sin x \leq 1$, $\therefore f(x) = \ln x - x + 2\sin x < \ln x - x + 2$

令 $t(x) = \ln x - x + 2, x \in (2\pi, +\infty)$, $t'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} < 0, x \in (2\pi, +\infty)$, 所以 $t(x) = \ln x - x + 2$ 在 $(2\pi, +\infty)$ 上

单调递减, $\therefore f(x) = \ln x - x + 2\sin x < \ln x - x + 2 < \ln 2\pi - 2\pi + 2 < 0$

综上所述 $f(x)$ 有且仅有两个不同的零点.