

2022 届 12 月 高三 联考

数学参考答案

一、二、选择题

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案	B	C	D	D	C	A	C	A	AB	BC	BCD	BD

1. B 【解析】 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 \leq 4\} = \{-1, 0, 1\}$, 所以 $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$.

2. C 【解析】由题意可知: $z = \frac{5}{2-i^3} = \frac{5}{2+i} = \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} = 2-i$, 则 $|z| = \sqrt{5}$.

3. D 【解析】由题意可得 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2a + 4 = 0$, 解得 $a = -2$, 所以 $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = (-4, 3)$, 因此 $|\vec{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$.

4. D 【解析】由题意 $\frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \tan \alpha = -2$, 则 $\frac{2\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1} = 5$.

5. C 【解析】设 $BC = 2a$, $PO = h$, $PH = s$, 则 $h^2 = as$, 又由勾股定理 $h^2 = s^2 - a^2$, 故 $as = s^2 - a^2$, 即 $\left(\frac{s}{a}\right)^2 - \frac{s}{a} - 1 = 0$, 因此可求得 $\frac{s}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 则 $PH = s = \frac{\sqrt{5}+1}{2}a = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{656}{2} \approx 530.7$.

6. A 【解析】由题意, 函数 $f(x) = \frac{x - \sin x}{x^2 + 1}$ 的定义域为 \mathbf{R} ,

且 $f(-x) = \frac{-x - \sin(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{\sin x - x}{x^2 + 1} = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为奇函数,

其图象关于原点对称, 所以排除 C、D 项,

又由当 $x > 0$ 时, $\sin x < x$, 可得 $f(x) > 0$, 所以排除 B 项.

7. C 【解析】依题意, 抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 准线 $l: x = -\frac{p}{2}$, 由抛物线定义知 $2 - \left(-\frac{p}{2}\right) = 3$, 解得 $p = 2$, 则准线 $l: x = -1$, 双曲线 C 的两条渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 于是得准线 l 与两条渐近线的交点分别为 $A\left(-1, \frac{b}{a}\right)$, $B\left(-1, -\frac{b}{a}\right)$, 原点为 O , 则 $\triangle AOB$ 面积 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot 1 = \frac{b}{a} = \sqrt{2}$, 双曲线 C 的半焦距为 c , 离心率为 e , 则有 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 3$, 解得 $e = \sqrt{3}$.

8. A 【解析】 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} + \frac{1}{a_7} + \frac{1}{a_8} = \frac{a_1 + a_8}{a_1 a_8} + \frac{a_2 + a_7}{a_2 a_7} + \frac{a_3 + a_6}{a_3 a_6} + \frac{a_4 + a_5}{a_4 a_5}$,

\because 等比数列 $\{a_n\}$ 中 $a_4 a_5 = -\frac{2}{5}$, 而 $a_1 a_8 = a_2 a_7 = a_3 a_6 = a_4 a_5 = -\frac{2}{5}$,

$\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} + \frac{1}{a_7} + \frac{1}{a_8} = -\frac{5}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8) = -\frac{5}{2} \times \frac{12}{5} = -6$.

9. AB 【解析】二项式 $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中共有 8 项, 则 $n = 7$, $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n = \left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$,

选项 A: 所有项的二项式系数和为 $2^7 = 128$, 故 A 正确;

选项 B: 令 $x = 1$, 则 $\left(2 \times 1 - \frac{1}{\sqrt{1}}\right)^7 = 1$, 所以所有项的系数的和为 1, 故 B 正确;

选项 C: 二项式系数最大的项为第 4 项和第 5 项, 故 C 不正确;

选项 D: 二项式的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_7^r (2x)^{7-r} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = C_7^r (-1)^r 2^{7-r} x^{7-\frac{3r}{2}}$,

当 $r=0,2,4,6$ 时,二项式的展开式中对应的项均为有理项,所以有理项有 4 项,故 D 不正确.

10. BC 【解析】 $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1$,

将函数 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长为原来的 3 倍,得到 $y=2\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)-1$,再向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个

单位长度,向上平移 2 个单位长度得 $g(x)=2\cos\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+1=2\cos\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)+1$,

选项 A: $g(x)$ 的最大值为 3,故 A 错误;

选项 B:令 $-\pi+2k\pi\leq\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}\leq 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,故 $-\frac{7\pi}{4}+3k\pi\leq x\leq -\frac{\pi}{4}+3k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

故函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{7\pi}{4}+3k\pi, -\frac{\pi}{4}+3k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$,故 B 正确;

选项 C:因为 $g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left[\frac{2}{3}\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{6}\right]+1=3=g(x)_{\max}$,所以 $x=-\frac{\pi}{4}$ 是函数 $g(x)$ 的一条对称轴,故 C 正确;

选项 D:因为 $g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left[\frac{2}{3}\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{6}\right]+1=3\neq 1$,所以 $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 不是函数 $g(x)$ 的一个对称中心,故 D 错误.

11. BCD 【解析】选项 A:由直线 l 的方程可得, $y-3=k(x-4)$,则直线 l 恒过定点 $A(4,3)$,此点在圆 C 内,故直线 l 与圆 C 相交. 故 A 错误.

选项 B: $k=1$ 时,直线 l 的方程为 $y-3=x-4$,即 $x-y-1=0$. 设圆心 $C(3,4)$ 到直线 l 距离为 d ,则 $d=\frac{|3-4-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,所以圆 C 上的点到直线 l 的最远距离为 $\sqrt{2}+2$. 故 B 正确.

选项 C:当圆 C 上有且仅有 3 个点到直线 l 的距离等于 1 时,圆心 $C(3,4)$ 到直线 l 距离为 1,

由 $d=\frac{|3k-4-4k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,得 $k=0$. 故 C 正确.

选项 D:直线 l 恒过定点 $A(4,3)$,设 M,N 的中点为 P ,由垂径定理知 $PC\perp PA$,故点 P 的轨迹是以 AC 为直径的圆,故 D 正确.

12. BD 【解析】取 CD,AB 的中点 O,M ,连接 OH,OM ,在图 1 中, $\because A,B,C,D$ 是正方形 $EFGH$ 各边的中点,则 $CH=DH$, $\because O$ 为 CD 的中点, $\therefore OH\perp CD$,

\because 平面 $CDH\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $CDH\cap$ 平面 $ABCD=CD,OH\subset$ 平面 CDH ,

$\therefore OH\perp$ 平面 $ABCD$,在图 1 中,四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形,

$\because O,M$ 分别为 CD,AB 的中点,则 $OC\parallel BM$ 且 $OC=BM$,且 $\angle OCB=90^\circ$,

所以四边形 $OCBM$ 为矩形,所以 $OM\perp CD$,

以点 O 为坐标原点, OM,OC,OH 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,

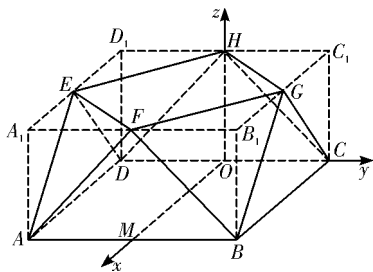
则 $A(2,-1,0),B(2,1,0),C(0,1,0),D(0,-1,0)$,

$E(1,-1,1),F(2,0,1),G(1,1,1),H(0,0,1)$.

选项 A,设平面 AEF 的一个法向量为 $\mathbf{m}=(x_1,y_1,z_1)$, $\overrightarrow{AE}=(-1,0,1),\overrightarrow{AF}=(0,1,1)$,

由 $\begin{cases} \mathbf{m}\cdot\overrightarrow{AE}=-x_1+z_1=0, \\ \mathbf{m}\cdot\overrightarrow{AF}=y_1+z_1=0, \end{cases}$ 取 $z_1=1$,则 $x_1=1,y_1=-1$,则 $\mathbf{m}=(1,-1,1)$.

设平面 CGH 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(x_2,y_2,z_2)$, $\overrightarrow{CG}=(1,0,1),\overrightarrow{CH}=(0,-1,1)$,



由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{CG} = x_2 + z_2 = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{CH} = -y_2 + z_2 = 0, \end{cases}$ 取 $z_2 = -1$, 可得 $x_2 = 1, y_2 = -1$, 则 $\vec{n} = (1, -1, -1)$.

$\vec{m} \cdot \vec{n} = 1^2 + (-1)^2 - 1 \times 1 = 1 \neq 0$, 所以, 平面 AEF 与平面 CGH 不垂直, 故 A 错误;

选项 B, $\vec{AF} = (0, 1, 1), \vec{CG} = (1, 0, 1), \cos \langle \vec{AF}, \vec{CG} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, 直线 AF 与 CG 所成的角为 60° , 故 B

正确;

选项 C, 以 $ABCD$ 为底面, 以 $|OH|$ 为高将几何体 $ABCD-EFGH$ 补成长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 则 E, F, G, H 分别为 $A_1D_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1$ 的中点,

因为 $AB=2, OH=1$, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $V=2^2 \times 1=4$,

$V_{A-A_1EF} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1EF} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1^2 \times 1 = \frac{1}{6}$, 因此, 多面体 $ABCD-EFGH$ 的体积为 $V_{ABCD-EFGH} =$

$V - 4V_{A-A_1EF} = 4 - 4 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{3}$, 故 C 错误;

选项 D, $\cos \langle \vec{CG}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{CG} \cdot \vec{m}}{|\vec{CG}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 设直线 CG 与平面 AEF 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sqrt{2}$, 故 D 正确.

三、填空题

13. -2 【解析】因为函数 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(3) = -f(-3) = -\log_2 [1 - (-3)] = -\log_2 4 = -2$.

14. $\frac{101}{110}$ 【解析】从 12 个点中任取三个点, 有 C_{12}^3 种取法,

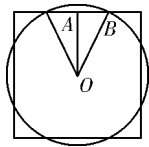
由图示得三个点在一条直线上的情况有 $6 + 3C_4^3 = 18$,

所以所取的三个点能构成三角形的概率为 $\frac{C_{12}^3 - 18}{C_{12}^3} = \frac{202}{220} = \frac{101}{110}$.

15. 6 【解析】设球心为 O , 作出过球心的截面图如图所示, 则 $OA = 3\sqrt{3}$,

由截面圆的周长为 6π , 得 $2\pi \times AB = 6\pi$, $\therefore AB = 3$,

球的半径是 $\sqrt{OA^2 + AB^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = 6$.



16. (1) 1 (2) $\left[\frac{\ln 2}{2}, \frac{1}{e}\right)$ 【解析】(1) 因为 $f(0) = 0$, 所以零点个数为 1;

(2) 由题设, 当 $-3 \leq x < 0$ 时, $f(x) = -(x-1)^2 + 1$, 故值域为 $[-15, 0)$ 且单调递增;

当 $0 \leq x \leq 3$ 时, $f'(x) = -\frac{1}{x+1} < 0$, 故 $f(x)$ 值域为 $[-\ln 4, 0]$ 且单调递减;

$\therefore |f(x)|$ 在 $[-3, 0)$ 上值域为 $(0, 15]$ 且单调递减; 在 $[0, 3]$ 上值域为 $[0, \ln 4]$ 且单调递增;

要使 $g(x)$ 与 x 轴有 3 个不同的交点, 即 $|f(x)|$ 与 $y = a(x+1)$ 有 3 个不同交点, 它们的图象如图所示, 由图知: 要使函数图象有 3 个交点, 则 $y = a(x+1)$ 与 $|f(x)|$ 在 $[0, 3]$ 上有 2 个交点,

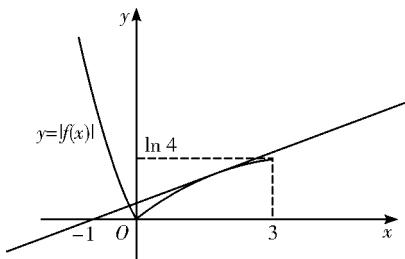
当 $0 \leq x \leq 3$ 时, 设 $h(x) = |f(x)| = -\ln \frac{1}{x+1} = \ln(x+1)$,

则 $h'(x) = \frac{1}{x+1}$,

此时, 若 $|f(x)|$ 与 $y = a(x+1)$ 相切, 设切点为 $(m, a(m+1))$,

$\therefore \begin{cases} \frac{1}{m+1} = a, \\ \ln(m+1) = a(m+1), \end{cases}$ 可得 $a = \frac{1}{e}$,

当 $y = a(x+1)$ 过点 $(3, \ln 4)$ 时, 有 $4a = \ln 4$, 得 $a = \frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$, $\therefore \frac{\ln 2}{2} \leq a < \frac{1}{e}$.



四、解答题

17.【解析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为 $S_7 = 4(a_2 + a_5)$,

$$\text{所以 } 7a_1 + \frac{7 \times 6}{2}d = 4(a_1 + d + a_1 + 4d), \text{ 即 } a_1 = d, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } a_1 = 2, \text{ 所以 } d = 2. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } a_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } b_n = 2a_n + 2^{a_n} = 4n + 2^{2n} = 4n + 4^n, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } T_n = 4(1+2+3+\dots+n) + (4^1+4^2+\dots+4^n) \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$= \frac{4n(1+n)}{2} + \frac{4 \times (1-4^n)}{1-4} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$= 2n(n+1) + \frac{4}{3}(4^n - 1). \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18.【解析】(1) 依题意 $2S = \sqrt{3} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, 则 $a \sin B = \sqrt{3} c \cos B$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$\text{又因为 } B \in (0, \pi), \sin B \neq 0, \text{ 所以 } \tan B = \sqrt{3}, \text{ 则 } B = \frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 解法一: 由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形及 $B = \frac{\pi}{3}$,

$$\text{得 } A = \frac{2\pi}{3} - C \in (0, \frac{\pi}{2}), C \in (0, \frac{\pi}{2}), \therefore C \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}), \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{4}{\sin C},$$

$$\therefore a = \frac{4 \sin A}{\sin C} = \frac{4 \sin(C + \frac{\pi}{3})}{\sin C} = \frac{2(\sin C + \sqrt{3} \cos C)}{\sin C} = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{\tan C}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\because C \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}), \therefore \tan C \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty), \therefore \frac{1}{\tan C} \in (0, \sqrt{3}), \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore 2 + \frac{2\sqrt{3}}{\tan C} \in (2, 8), \text{ 即所求 } a \text{ 的取值范围是 } (2, 8). \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

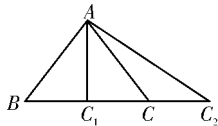
解法二: 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 60^\circ$, 当 $\angle A, \angle C$ 变化时,

求 a 的范围, 可转化为求临界值点 ($\angle A$ 或 $\angle C = 90^\circ$) 时 a 的范围. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

如图, 当 $\angle C = 90^\circ$ 时, $a = BC_1 = 2$; $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

当 $\angle A = 90^\circ$ 时, $a = BC_2 = 8$. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

$\therefore a$ 的取值范围是 $(2, 8)$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$



19.【解析】(1) 若乙笔试部分三个环节全部通过或通过两个, 则能参与面试,

$$\text{故乙能参与面试的概率 } P = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) X 的可能取值为 $0, 1, 2, 3, 4, 5$, $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$$P(X=0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$P(X=1) = C_3^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{27}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$P(X=3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + C_3^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{22}{81}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$P(X=4)=\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)+C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{27}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$P(X=5)=\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{81}. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{22}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$

$$\text{故 } E(X)=0\times\frac{1}{27}+1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{2}{27}+3\times\frac{22}{81}+4\times\frac{8}{27}+5\times\frac{8}{81}=\frac{232}{81}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20.【解析】解法一：由题设知， AA_1, AB, AD 两两垂直，

以 A 为坐标原点， AB, AD, AA_1 所在直线分别为 x 轴， y 轴， z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，
 $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

则相关各点的坐标为 $A(0,0,0), B_1(2,0,4), D(0,4,0), D_1(0,2,4)$,

设 $Q(4,m,0)$ ，其中 $m=BQ, 0\leq m\leq 4$ ， $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

(1) 若 P 是 DD_1 的中点，则 $P(0,3,2), \overrightarrow{AB_1}=(2,0,4), \overrightarrow{PQ}=(4,m-3,-2)$ ，

于是 $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{PQ}=8-8=0, \therefore \overrightarrow{AB_1} \perp \overrightarrow{PQ}$ ，即 $AB_1 \perp PQ$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 由题设知， $\overrightarrow{DQ}=(4,m-4,0), \overrightarrow{DD_1}=(0,-2,4)$ ，是平面 PDQ 内的两个不共线向量.

设 $\mathbf{n}_1=(x,y,z)$ 是平面 PDQ 的一个法向量，则 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{DQ}=0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{DD_1}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 4x+(m-4)y=0, \\ -2y+4z=0, \end{cases}$

取 $y=4$ ，得 $\mathbf{n}_1=(4-m,4,2)$.

又平面 AQD 的一个法向量是 $\mathbf{n}_2=(0,0,1)$ ， $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

$$\therefore \cos\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{2}{\sqrt{(4-m)^2+4^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{(4-m)^2+20}},$$

而二面角 $P-QD-A$ 的余弦值为 $\frac{4}{9}$ ，因此 $\frac{2}{\sqrt{(4-m)^2+20}} = \frac{4}{9}$ ，

解得 $m=\frac{7}{2}$ ，或者 $m=\frac{9}{2}$ (舍去)，此时 $Q(4, \frac{7}{2}, 0)$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

设 $\overrightarrow{DP}=\lambda \overrightarrow{DD_1} (0<\lambda\leq 1)$ ，而 $\overrightarrow{DD_1}=(0,-2,4)$ ，由此得点 $P(0,4-2\lambda,4\lambda), \overrightarrow{PQ}=(4,2\lambda-\frac{1}{2},-4\lambda)$ ，

$\therefore PQ \parallel$ 平面 ABB_1A_1 ，且平面 ABB_1A_1 的一个法向量是 $\mathbf{n}_3=(0,1,0)$ ，

$\therefore \overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}_3=0$ ，即 $2\lambda-\frac{1}{2}=0$ ，亦即 $\lambda=\frac{1}{4}$ ，从而 $P(0, \frac{7}{2}, 1)$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

将四面体 $ADPQ$ 视为以 $\triangle ADQ$ 为底面的三棱锥 $P-ADQ$ ，则其高 $h=1$ ， $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

$$\text{故四面体 } ADPQ \text{ 的体积 } V=\frac{1}{3} S_{\triangle ADQ} \cdot h=\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 1=\frac{8}{3}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

解法二：(1) 如图，取 A_1A 的中点 R ，连接 PR, BR ，

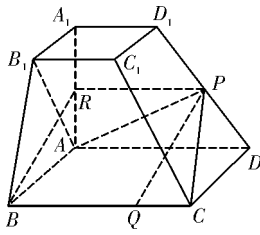
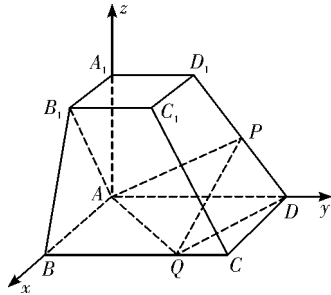
$\therefore A_1A, D_1D$ 是梯形 A_1ADD_1 的两腰， P 是 D_1D 的中点， $\therefore PR \parallel AD$ ，

于是由 $AD \parallel BC$ 知， $PR \parallel BC$ ， $\therefore P, R, B, C$ 四点共面，

由题设知， $BC \perp AB, BC \perp A_1A, AB \cap A_1A=A$ ，

$\therefore BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 ，

因此 $BC \perp AB_1$ ，① $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$



$\therefore \tan \angle ABR = \frac{AR}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{A_1B_1}{A_1A} = \tan \angle A_1AB_1, \therefore \tan \angle ABR = \tan \angle A_1AB_1,$

因此 $\angle ABR + \angle BAB_1 = \angle A_1AB_1 + \angle BAB_1 = 90^\circ$, 于是 $AB_1 \perp BR$, ② 4 分

由 ①② 即知 $AB_1 \perp$ 平面 $PRBC$, 又 $PQ \subset$ 平面 $PRBC$, 故 $AB_1 \perp PQ$ 6 分

(2) 如图, 过点 P 作 $PM \parallel A_1A$ 交 AD 于点 M , 则 $PM \parallel$ 平面 ABB_1A_1 ,

$\therefore A_1A \perp$ 平面 $ABCD, \therefore PM \perp$ 平面 $ABCD$,

过点 M 作 $MN \perp QD$ 于点 N , 连接 PN , 则 $PN \perp QD$,

$\angle PNM$ 为二面角 $P-QD-A$ 的平面角,

$\therefore \cos \angle PNM = \frac{4}{9}$, 即 $\frac{MN}{PN} = \frac{4}{9}$, 从而 $\frac{PM}{MN} = \frac{\sqrt{65}}{4}$, ③ 8 分

连接 MQ , 由 $PQ \parallel$ 平面 $ABB_1A_1, \therefore MQ \parallel AB$,

又 $ABCD$ 是正方形, 所以 $ABQM$ 为矩形, 故 $MQ = AB = 4$,

设 $MD = t$, 则 $MN = \frac{MQ \cdot MD}{\sqrt{MQ^2 + MD^2}} = \frac{4t}{\sqrt{16 + t^2}}$, ④ 9 分

过点 D_1 作 $D_1E \parallel A_1A$ 交 AD 于点 E , 则 AA_1D_1E 为矩形, $\therefore D_1E = A_1A = 4, AE = A_1D_1 = 2$, 因此 $ED = 2$,

于是 $\frac{PM}{MD} = \frac{D_1E}{ED} = \frac{4}{2} = 2, \therefore PM = 2MD = 2t$,

再由 ③④ 得 $\frac{\sqrt{16 + t^2}}{2} = \frac{\sqrt{65}}{4}$, 解得 $t = \frac{1}{2}$, 因此 $PM = 1$, 11 分

故四面体 $ADPQ$ 的体积 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ADQ} \cdot h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 1 = \frac{8}{3}$ 12 分

21. 【解析】(1) 由题知 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 则 $a = 2c, b = \sqrt{3}c$, 1 分

椭圆经过点 $(1, \frac{3}{2})$ 即 $\frac{1}{4c^2} + \frac{9}{12c^2} = 1$, 2 分

解得: $c = 1, \begin{cases} a = 2, \\ b = \sqrt{3}, \end{cases}$ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 5 分

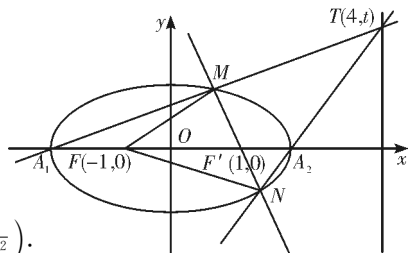
(2) 解法一: 证明: 由题意可知, $A_1(-2, 0), A_2(2, 0), T(4, t) (t \neq 0)$, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

直线 A_1T 的方程为 $y = \frac{t}{6}(x + 2)$, 直线 A_2T 的方程为 $y = \frac{t}{2}(x - 2)$,

联立方程组 $\begin{cases} y = \frac{t}{6}(x + 2), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 可得 $(27 + t^2)x^2 + 4t^2x + 4t^2 - 108 = 0$,

可得 $-2 \cdot x_1 = \frac{4t^2 - 108}{27 + t^2}$, 所以 $x_1 = \frac{54 - 2t^2}{27 + t^2}$,

则 $y_1 = \frac{t}{6}(x_1 + 2) = \frac{t}{6} \left(\frac{54 - 2t^2}{27 + t^2} + 2 \right) = \frac{18t}{27 + t^2}$, 故 $M \left(\frac{54 - 2t^2}{27 + t^2}, \frac{18t}{27 + t^2} \right)$.



..... 6 分

由 $\begin{cases} y = \frac{t}{2}(x - 2), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 可得 $(3 + t^2)x^2 - 4t^2x + 4t^2 - 12 = 0$, 可得 $2x_2 = \frac{4t^2 - 12}{3 + t^2}$, 所以 $x_2 = \frac{2t^2 - 6}{3 + t^2}$,

则 $y_2 = \frac{t}{2}(x_2 - 2) = \frac{t}{2} \left(\frac{2t^2 - 6}{3 + t^2} - 2 \right) = \frac{-6t}{3 + t^2}$, 故 $N \left(\frac{2t^2 - 6}{3 + t^2}, \frac{-6t}{3 + t^2} \right)$, 7 分

所以 $k_{MN} = \frac{\frac{18t}{27+t^2} + \frac{6t}{3+t^2}}{\frac{54-2t^2}{27+t^2} - \frac{2t^2-6}{3+t^2}} = -\frac{6t}{t^2-9}$, 8 分

故直线 MN 的方程为 $y + \frac{6t}{3+t^2} = -\frac{6t}{t^2-9} \left(x - \frac{2t^2-6}{3+t^2} \right)$,

即 $y = -\frac{6t}{t^2-9}x + \frac{6t}{t^2-9} = -\frac{6t}{t^2-9}(x-1), t \neq \pm 3$, 9 分

故直线 MN 过定点 $(1, 0)$, 所以 $\triangle FMN$ 的周长为定值 8. 10 分

当 $t = \pm 3$ 时, $M\left(1, \frac{3}{2}\right), N\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ 或 $M\left(1, -\frac{3}{2}\right), N\left(1, \frac{3}{2}\right)$, 可知 MN 是椭圆的通径,

经过焦点 $(1, 0)$, 此时 $\triangle FMN$ 的周长为定值 $4a = 8$, 11 分

综上所述, $\triangle FMN$ 的周长为定值 8. 12 分

解法二: 当直线 MN 斜率存在时, 设其方程为: $y = kx + m$,

由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow (3+4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0.$

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则有 $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{3+4k^2}, x_1 \cdot x_2 = \frac{4m^2-12}{3+4k^2}$, 6 分

直线 A_1M : $y = \frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$, 令 $x = 4$, 得 $y = \frac{6y_1}{x_1+2}$,

直线 A_2N : $y = \frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$, 令 $x = 4$, 得 $y = \frac{2y_2}{x_2-2}$, 所以 $\frac{3y_1}{x_1+2} = \frac{y_2}{x_2-2}$,

由 $\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} = 1 \Rightarrow \frac{y_2}{x_2-2} = -\frac{3(x_2+2)}{4y_2} \Rightarrow \frac{3y_1}{x_1+2} = -\frac{3(x_2+2)}{4y_2}$, 8 分

所以 $(x_1+2) \cdot (x_2+2) + 4(kx_1+m) \cdot (kx_2+m) = 0$,

即 $(4k^2+1)x_1x_2 + (2+4km)(x_1+x_2) + 4m^2+4 = 0$,

化简得 $(m-2k)(m+k) = 0 \Rightarrow m = 2k$ 或 $m = -k$.

$m = 2k$ 时直线 MN 过点 $A_1(-2, 0)$ (舍), 所以 $m = -k$,

即直线 MN 的方程为 $y = k(x-1)$, 过定点 $(1, 0)$ 10 分

当直线 MN 的斜率不存在时, 设其方程为: $x = t$,

则有 $x_1 = x_2 = t, y_1 = -y_2$, 代入 $\frac{3y_1}{x_1+2} = \frac{y_2}{x_2-2} \Rightarrow \frac{3}{t+2} = -\frac{1}{t-2} \Rightarrow t = 1$,

直线 $x = 1$ 也过定点 $(1, 0)$ 11 分

综上所述, 直线 MN 始终经过椭圆的右焦点, 故 $\triangle FMN$ 的周长为定值 $4a = 8$ 12 分

解法三: 当 M 位于椭圆的上顶点, 则此时 $M(0, \sqrt{3})$, 直线 A_1M 与 $l: x = 4$ 相交于点 $T(4, 3\sqrt{3})$,

则直线 A_2T 的方程为 $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}(x-2)$,

联立椭圆方程可得: $15x^2 - 54x + 48 = 0$, 则可知 $N\left(\frac{8}{5}, -\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)$,

易知直线 MN 经过椭圆的右焦点 $F'(1, 0)$, 此时 $\triangle FMN$ 的周长为定值 $4a = 8$,

猜想, 若 $\triangle FMN$ 的周长为定值, 则直线 MN 经过椭圆的右焦点. 7 分

证明如下:

依题意直线 MN 的斜率不为 0, 设直线 MN 的方程为 $x = 1 + my$,

代入椭圆方程得: $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$,

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}, y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$ 8 分

直线 $A_1M: y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$, 令 $x=4$, 得 $y=\frac{6y_1}{x_1+2}$,

直线 $A_2N: y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$, 令 $x=4$, 得 $y=\frac{2y_2}{x_2-2}$, 9 分

因为 $\frac{6y_1}{x_1+2}-\frac{2y_2}{x_2-2}=\frac{2[3y_1(x_2-2)-y_2(x_1+2)]}{(x_1+2)(x_2-2)}=\frac{2[2my_1y_2-3(y_1+y_2)]}{(x_1+2)(x_2-2)}=\frac{2\left[2m\times\frac{-9}{3m^2+4}-3\times\frac{-6m}{3m^2+4}\right]}{(x_1+2)(x_2-2)}$
 $=0$, 11 分

所以直线 A_1M, A_2N 的交点在直线 $l: x=4$ 上, 即过直线 $l: x=4$ 上的点 T 所作的两条直线 TA_1 和 TA_2 分别与椭圆相交所得的两点 M, N 形成的直线 MN 始终经过椭圆的右焦点,

故 $\triangle FMN$ 的周长为定值 $4a=8$ 12 分

22. 【解析】(1) $f'(x)=\frac{a(1-\ln x)}{x^2}$, 1 分

若 $a>0$, 则当 $x\in(0, e)$ 时, $\frac{1-\ln x}{x^2}>0, f'(x)>0, f(x)$ 单调递增;

当 $x\in(e, +\infty)$ 时, $\frac{1-\ln x}{x^2}<0, f'(x)<0, f(x)$ 单调递减. 3 分

若 $a<0$, 则当 $x\in(0, e)$ 时, $\frac{1-\ln x}{x^2}>0, f'(x)<0, f(x)$ 单调递减;

当 $x\in(e, +\infty)$ 时, $\frac{1-\ln x}{x^2}<0, f'(x)>0, f(x)$ 单调递增. 5 分

(2) 由已知得 $g(x)=\frac{xe^x-a(\ln x+x)}{x}=0$ 有两个不等的正实根,

所以方程 $xe^x-a(\ln x+x)=0$, 即 $xe^x-a\ln(xe^x)=0$, 即 $a\ln(xe^x)=xe^x$ 有两个不等正实根.

① 设 $xe^x=t$, 则 $a\ln t=t (t>0)$ 有两个不等根, 又 a 为非零实数, 即 $\frac{\ln t}{t}=\frac{1}{a}$ 有两个不等根,

由(1)知, 函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, e)$ 递增, 在 $(e, +\infty)$ 递减, 有极大值 $\frac{1}{e}$, 6 分

又 $x\rightarrow 0$ 时, $f(x)\rightarrow -\infty$; $x\rightarrow +\infty$ 时, $f(x)\rightarrow 0$.

若 $\frac{\ln t}{t}=\frac{1}{a}$ 有两个不等根, 则 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{e}$, 即实数 a 的取值范围是 $(e, +\infty)$ 7 分

② 要证 $x_1x_2>e^{2-(x_1+x_2)}$, 只需证 $(x_1e^{x_1})\cdot(x_2e^{x_2})>e^2$, 即证 $\ln(x_1e^{x_1})+\ln(x_2e^{x_2})>2$.

令 $t_1=x_1e^{x_1}, t_2=x_2e^{x_2}$, 所以只需证 $\ln t_1+\ln t_2>2$ 8 分

由 $a\ln(xe^x)=xe^x$ 得 $a\ln t_1=t_1, a\ln t_2=t_2$, 所以 $a(\ln t_2-\ln t_1)=t_2-t_1, a(\ln t_2+\ln t_1)=t_2+t_1$,

消去 a 得 $\ln t_2+\ln t_1=\frac{t_2+t_1}{t_2-t_1}(\ln t_2-\ln t_1)=\frac{\left(\frac{t_2}{t_1}+1\right)\ln\frac{t_2}{t_1}}{\frac{t_2}{t_1}-1}$, 只需证 $\frac{\left(\frac{t_2}{t_1}+1\right)\ln\frac{t_2}{t_1}}{\frac{t_2}{t_1}-1}>2$.

设 $0<t_1<t_2$, 令 $s=\frac{t_2}{t_1}$, 则 $s>1$, 所以只需证 $\ln s>2\frac{s-1}{s+1}$ 10 分

令 $h(s)=\ln s-2\frac{s-1}{s+1}, s>1$, 则 $h'(s)=\frac{1}{s}-\frac{4}{(s+1)^2}=\frac{(s-1)^2}{s(s+1)^2}>0$,

所以 $h(s)>h(1)=0$, 即当 $s>1$ 时, $\ln s-2\frac{s-1}{s+1}>0$ 成立.

所以 $\ln t_1+\ln t_2>2$, 即 $(x_1e^{x_1})\cdot(x_2e^{x_2})>e^2$, 即 $x_1x_2>e^{2-(x_1+x_2)}$ 12 分