

2021 届高三年级第一学期期中调研考试

数 学 试 题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效.

3. 考试结束后, 将答题卡交回.

一、单项选择题 (本大题共 8 个小题, 每小题 5 分, 共 40 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 集合 $A = \{x | -4 < x < 2\}$, $B = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $(-4, 2)$ B. $(-2, 3)$ C. $(-4, 3)$ D. $(-2, 2)$

2. 已知复数 z 满足 $(z-1)i = 1+i$, 则 $z =$

- A. $2+i$ B. $-2+i$ C. $-2-i$ D. $2-i$

3. 王安石在《游褒禅山记》中写道“世之奇伟、瑰怪, 非常之观, 常在于险远, 而人之所罕至焉, 故非有志者不能至也”, 则“到达奇伟、瑰怪, 非常之观”是“有志”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 设 $a = 0.5^{0.4}$, $b = \log_{0.4} 0.3$, $c = \log_8 0.4$, 则 a, b, c 的大小关系是

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

5. 函数 $f(x) = \begin{cases} \log_1 x, & x > 1, \\ \frac{1}{2}, & \\ 1-x, & x \leq 1, \end{cases}$ 则满足 $f(1) < f(t^2)$ 的 t 的取值范围是

- A. $(1, +\infty)$ B. $(-1, 1)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(0, 1)$

6. 已知 $x > 0$, $y > 0$, 若 $\frac{2}{x} + y = 1$, 则 $x + \frac{2}{y}$ 的最小值是

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

7. 物体在常温下的温度变化可以用牛顿冷却规律来描述：设物体的初始温度是 T_0 ，经过一定时间 t 后的温度为 T ，则 $T - T_a = (T_0 - T_a)(\frac{1}{2})^{\frac{t}{h}}$ ，其中 T_a 称为环境温度， h 称为半衰期。现有一杯用 90°C 热水冲的速溶咖啡，放在 26°C 的房间，如果咖啡降到 42°C 需要 20 分钟，那么此杯咖啡降温到 34°C 时还需要

A. 6 分钟 B. 8 分钟 C. 10 分钟 D. 20 分钟

8. 已知球 O 是正三棱锥 $S-ABC$ 的外接球，侧棱 $SA=2$ ，底边 $BC=\sqrt{3}$ ，过 BC 作球 O 的截面，则所得截面圆面积的取值范围是

A. $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$ B. $[\frac{3\pi}{4}, \frac{4}{3}\pi]$ C. $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ D. $[\pi, \frac{4\pi}{3}]$

二、多项选择题（本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求。全选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分）

9. 若 $a > b > 0$ ，则

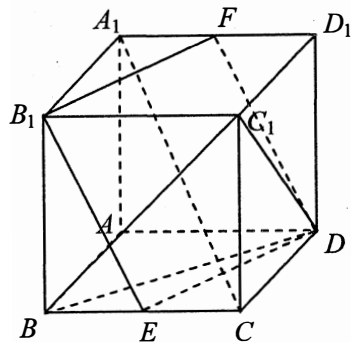
A. $ac^2 \geq bc^2$ B. $a^2 < ab < b^2$ C. $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab}$ D. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

10. 已知函数 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ ，下列说法正确的是

A. 函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴为直线 $x = \frac{\pi}{6}$
 B. 函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{\pi}{3}, 0)$
 C. 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{12})$ 上是增函数
 D. 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到 $g(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象

11. 如图，在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别是 BC, A_1D_1 的中点。下列结论正确的是

A. 四边形 B_1FDE 是菱形
 B. 直线 A_1C 与 C_1D 所成角为 90°
 C. 直线 AD 与平面 B_1FDE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 D. 点 A_1 到平面 BC_1D 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$



12. 关于函数 $f(x) = e^{|x|} \cos x + 2$ ，下列说法正确的是

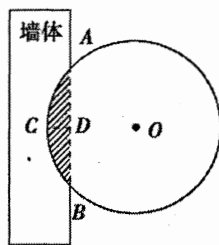
A. $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数 B. $y = f(x) - 2$ 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 内有 4 个零点
 C. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上为增函数 D. $f(x)$ 在 $(-10\pi, 10\pi)$ 内有 18 个极值点

三、填空题（本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数，且当 $x < 0$ 时， $f(x) = e^x$ ，则 $f(1) = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

14. 已知 $\tan \alpha = 3$ ，则 $\frac{\sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})}{2 \sin \alpha - \cos \alpha} + \tan 2\alpha = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

15. 我国古代数学经典《九章算术》中对勾股定理的论术比西方早一千多年，其中有这样一个问题：“今有圆材埋在壁中，不知大小，以锯锯之，深一寸，锯道长一尺，问径几何？”其意为：今有一圆柱形木材，埋在墙壁中，不知其大小，用锯去锯该材料，锯口深 1 寸，锯道长 1 尺，问这块圆柱形木料的直径是多少？长为 1 丈的圆柱形木材部分镶嵌在墙体中，截面图如图所示(阴影部分为镶嵌在墙体内部的部分). 已知弦 $AB = 1$ 尺，弓形高 $CD = 1$ 寸，则该木材镶嵌在墙中的体积约为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 立方寸.



(结果保留整数)(注: 1 丈 = 10 尺 = 100 寸, $\pi \approx 3$, $\sin 22.6^\circ \approx \frac{5}{13}$)

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $AB = 4$, $AC = 3$, D 是 AC 边的中点, 点 E 在 AB 边上, 且 $AE = \frac{1}{2}EB$, BD 与 CE 交于点 M , N 是 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

四、解答题（本大题共 6 个小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. (本小题满分 10 分)

在① $a = \frac{\sqrt{7}}{2}b$, ② $a \sin B = \sqrt{3}$, ③ $a + c = 2$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题

中, 若问题中的三角形存在, 求 $\triangle ABC$ 的面积; 若问题中的三角形不存在, 说明理由.

问题: 是否存在 $\triangle ABC$, 它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - \sin B \sin C, \quad b + c = 5, \quad \underline{\hspace{2cm}}.$$

注: 如果选择多个条件分别作答, 按第一个解答计分.

18. (本小题满分 12 分)

已知关于 x 的不等式 $(a-1)x^2 + (a-1)x + 2 \geq 0$ 的解集为 A .

(1) 当 $a = 0$ 时, “ $x \in A$ ” 是 “ $m-1 \leq x \leq m+1$ ” 的必要条件, 求 m 的取值范围;

(2) 若 $A = \mathbf{R}$, 求 a 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

已知 $a \geq 1$, 函数 $f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax$.

(1) 若 $a=2$, 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 3]$ 上的最大值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间.

20. (本小题满分 12 分)

已知向量 $\vec{a} = (\cos \alpha, 1 + \sin \alpha)$, $\vec{b} = (1 + \cos \alpha, \sin \alpha)$, $\alpha \in [0, \pi]$.

(1) 若 $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$, 求 $\sin \alpha - \cos \alpha$ 的值;

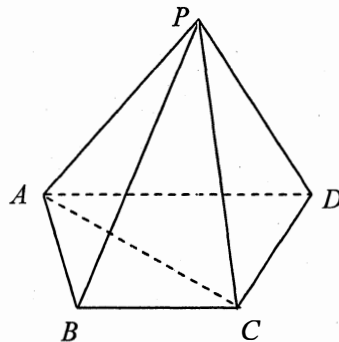
(2) 设 $\vec{c} = (-\cos \alpha, m + \sin \alpha)$, $m \in \mathbf{R}$, 求 $(\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{b}$ 的最大值.

21. (本小题满分 12 分)

已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \perp AD$, $PA \perp PD$, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.

(1) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PCD ;

(2) 若 $BC \parallel AD$, $AB = BC = \frac{1}{2}AD = 1$, $AP = \sqrt{3}$, 求钝二面角 $A-PC-D$ 的余弦值.



22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2x \ln x + \frac{3}{2}x - 2(a-1)x^2$, $g(x) = ax^3 - \frac{1}{2}x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若曲线 $y = g(x)$ 在点 $(x_0, g(x_0))$ 处的切线方程为 $y = x - 2$, 求 a 的值;

(2) 若 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 求整数 a 的最小值.