

2021 届高三年级第一学期期中调研考试

参考答案

一、单项选择题（本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分）

1. C 2. D 3. A 4. B 5. B 6. D 7. C 8. B

二、多项选择题（本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分）

9. AC 10. BC 11. ABD 12. BC

三、填空题（本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. $-\frac{1}{e}$ 14. $\frac{1}{20}$ 15. 366 16. $\frac{26}{5}$

四、解答题（本大题共 6 个小题，共 70 分）

17. 解：若选①，在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得， $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ ，……………2 分

$$\text{又 } a = \frac{\sqrt{7}}{2}b, b+c=5,$$

所以 $a = \sqrt{7}$, $b = 2$, $c = 3$ ……………6 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得， $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$ ……………8 分

所以 $A = \frac{\pi}{3}$ ，所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ……………10 分

若选②，在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得， $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ ，……………2 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得， $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$

所以 $A = \frac{\pi}{3}$ ，……………4 分

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得， $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，

所以 $b \sin A = a \sin B = \sqrt{3}$ ，所以 $b = 2$

又 $b+c=5$ ，所以 $c=3$ ……………8 分

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ……………10 分

若选③，在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得， $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ ，……………2 分

又 $a+c=2$, $b+c=5$,

此时方程无解，故不存在。……………10 分

18. 解：(1) 当 $a=0$ 时， $A = [-2, 1]$ ，……………2 分

因为“ $x \in A$ ”是“ $m-1 \leq x \leq m+1$ ”的必要条件

所以 $[m-1, m+1] \subseteq [-2, 1]$ ，……………4 分

故 $\begin{cases} m-1 \geq -2 \\ m+1 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq m \leq 0$. ……………6 分

(2) 若 $A = \mathbf{R}$ ，则

①当 $a-1=0$ ，即 $a=1$ 时， $2 \geq 0$ 恒成立，所以 $a=1$ 符合题意。……………8 分

②当 $a-1 \neq 0$ ，

则 $\begin{cases} a-1 > 0, \\ \Delta = (a-1)^2 - 8(a-1) \leq 0, \end{cases}$ 解得 $1 < a \leq 9$. ……………11 分

综上： $1 \leq a \leq 9$.……………12 分

19. 解: (1) 当 $a=2$ 时, $f(x)=2x^3-9x^2+12x$.

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$$

令 $f'(x)=0$, 得到 $x_1=1, x_2=2$2 分

x	0	(0, 1)	1	(1, 2)	2	(2, 3)	3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	递增	极大值	递减	极小值	递增	9

因为 $f(1)=5, f(3)=9$ 4 分

综上, $f(x)$ 的闭区间 $[0,3]$ 上的最值为 96 分

$$(2) f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a=6(x-1)(x-a).$$

令 $f'(x)=0$, 得到 $x_1=1, x_2=a$8 分

①若 $a=1$, 则 $f'(x) \geq 0$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, +\infty)$ 10 分

②若 $a > 1$, 令 $f'(x) > 0$, 得到 $x_1 < 1$ 或 $x_2 > a$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, 1), (a, +\infty)$ 12 分

$$20. \text{ 解: (1) 因 } \vec{a} + \vec{b} = (1+2\cos\alpha, 1+2\sin\alpha), |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(1+2\cos\alpha)^2 + (1+2\sin\alpha)^2} \\ = \sqrt{6+4(\sin\alpha + \cos\alpha)} = 2,$$

$$\therefore \sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{1}{2} \text{2 分}$$

$$\text{两边平方得 } 1+2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}, \therefore \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = -\frac{3}{4} \text{4 分}$$

$$\text{则 } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \sin\alpha - \cos\alpha > 0,$$

$$\text{又 } \because (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4},$$

$$\text{故 } \sin\alpha - \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{6 分}$$

$$(2) \text{ 因 } \vec{a} + \vec{c} = (0, 1+m+2\sin\alpha),$$

$$\therefore (\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{b} = 2\sin^2\alpha + (m+1)\sin\alpha,$$

$$\text{令 } t = \sin\alpha, t \in [0, 1], \text{ 令 } g(t) = 2t^2 + (m+1)t = 2\left(t + \frac{m+1}{4}\right)^2 - \frac{(m+1)^2}{8},$$

$$\text{法一: 对称轴为 } t = -\frac{m+1}{4}$$

$$\text{①当 } -\frac{m+1}{4} \leq \frac{1}{2}, \text{ 即 } m \geq -3 \text{ 时, } g(t)_{\max} = g(1) = m+3.$$

$$\text{②当 } -\frac{m+1}{4} > \frac{1}{2}, \text{ 即 } m < -3 \text{ 时, } g(t)_{\max} = g(0) = 0.$$

综上: 当 $m \geq -3$ 时, 最大值为 $m+3$; 当 $m < -3$ 时, 最大值为 0.12 分

$$\text{法二: } g(1) = m+3, g(0) = 0.$$

当 $g(1) = m+3 \geq g(0) = 0$ 时, 即 $m \geq -3$ 时, 最大值为 $m+3$;

当 $g(1) = m+3 < g(0) = 0$ 时, $m < -3$ 时, 最大值为 0.

21. 解: (1)证明: 因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$,
 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $AB \perp AD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$
 所以 $AB \perp$ 平面 PAD . 又 $PD \subset$ 平面 PAD ,
 所以 $PD \perp AB$,2分
 又 $PD \perp PA$, $AB \cap PA = A$, $AB \subset$ 平面 PAB , $PA \subset$ 平面 PAB
 所以 $PD \perp$ 平面 PAB , 又 $PD \subset$ 平面 PCD
 所以平面 $PAB \perp$ 平面 PCD4分

(2)过A在平面内PAD作 $Az \perp AD$, 则 $Az \perp$ 平面 $ABCD$.
 以A为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$,
 则 $A(0, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$, $D(0, 2, 0)$,
 设 $P(0, a, b)$ ($a > 0, b > 0$).

所以 $\overrightarrow{AP} = (0, a, b)$, $\overrightarrow{DP} = (0, a-2, b)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$,
 $\overrightarrow{CD} = (-1, 1, 0)$.

因为 $PA \perp PD$, 所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DP} = a(a-2) + b^2 = 0$.
 又 $AP = \sqrt{3}$, 所以 $a^2 + b^2 = 3$.

所以 $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$,6分

所以 $\overrightarrow{AP} = (0, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}b)$

设平面APC的法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} \frac{3}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_1 = 0, \\ x_1 + y_1 = 0 \end{cases}, \quad \text{令 } x_1 = 1, \text{ 得 } y_1 = -1, z_1 = \sqrt{3},$$

所以平面APC的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, -1, \sqrt{3})$,8分

设平面DPC的法向量为 $\mathbf{m} = (x_2, y_2, z_2)$.

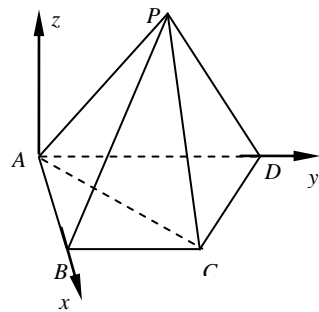
$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DP} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CD} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} -\frac{1}{2}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_2 = 0, \\ x_2 - y_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{令 } x_2 = 1, \text{ 得 } y_2 = 1, z_2 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以平面DPC的一个法向量为 $\mathbf{m} = (1, 1, \frac{\sqrt{3}}{3})$10分

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{5} \sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{\sqrt{105}}{35}. \quad \text{.....11分}$$

所以所求二面角与向量夹角相等或互补, 由图形知,

二面角 $A-PC-D$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{105}}{35}$ 12分



22. 解: (1) 因为 $g'(x) = 3ax^2 - \frac{1}{2}$, 所以 $g'(x_0) = 3ax_0^2 - \frac{1}{2}$,

$$\text{因为 } g(x_0) = ax_0^3 - \frac{1}{2}x_0, \text{ 所以 } \begin{cases} 3ax_0^2 - \frac{1}{2} = 1, \\ ax_0^3 - \frac{1}{2}x_0 = x_0 - 2, \end{cases} \quad \text{得 } \begin{cases} x_0 = 2 \\ a = \frac{1}{8} \end{cases}. \text{ 所以 } a = \frac{1}{8}. \quad \text{.....4分}$$

(2) 因为 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 所以 $2 - ax^2 + 2\ln x \leq 2(a-1)x$
 整理得, $a(2x + x^2) \geq 2(\ln x + x + 1)$,

因为 $x > 0$, 所以 $a \geq \frac{2(\ln x + x + 1)}{2x + x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,6 分

$$\text{令 } h(x) = \frac{2(\ln x + x + 1)}{2x + x^2}, \text{ 则 } h'(x) = \frac{-2(x+1)(2\ln x + x)}{(2x + x^2)^2},$$

令 $\varphi(x) = 2\ln x + x$, 则 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $\varphi(\frac{1}{2}) = -2\ln 2 + \frac{1}{2} < 0$, $\varphi(1) = 1 > 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上有唯一零点,8 分

即存在 $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $\varphi(x_0) = 2\ln x_0 + x_0 = 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递减,

所以 $h(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极大值, 也是最大值,

$$\text{所以 } h(x)_{\max} = \frac{x_0 + 2}{2x_0 + x_0^2} = \frac{1}{x_0}, \text{ 所以 } a \geq \frac{1}{x_0}, \text{10 分}$$

又 $\frac{1}{x_0} \in (1, 2)$, 且 a 为整数, 所以 a 的最小整数为 212 分

$$\text{法二: 因为 } 2x\ln x + \frac{3}{2}x - 2(a-1)x^2 - ax^3 + \frac{1}{2}x \leq 0,$$

$$\text{所以 } 2\ln x - 2(a-1)x - ax^2 + 2 \leq 0,$$

$$\text{令 } h(x) = 2\ln x - 2(a-1)x - ax^2 + 2,$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{-2(ax-1)(x+1)}{x} \text{6 分}$$

①当 $a=0$ 时, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

因为 $h(1) = 4 > 0$ 与 $h(x) \leq 0$ 矛盾, 舍去;7 分

②当 $a < 0$ 时, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

因为 $h(1) = 4 - 3a > 0$ 与 $h(x) \leq 0$ 矛盾, 舍去;8 分

③当 $a > 0$ 时, $h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 单调递减,

$$\text{所以 } h(x)_{\max} = h(\frac{1}{a}) = -2\ln a + \frac{1}{a} \leq 0, \text{ 所以 } 2a\ln a - 1 \geq 0,$$

$$\text{令 } m(a) = 2a\ln a - 1, \text{ 令 } m'(a) = 0 \text{ 得 } a = \frac{1}{e},$$

则 $m(a)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 单调递增,

因为 a 是整数, 且 $m(1) < 0$, $m(2) = 4\ln 2 - 1 > 0$

所以 a 的最小整数为 212 分