

盐城市、南京市 2022 届高三年级第一次模拟考试

数 学

2022.01

(总分 150 分, 考试时间 120 分钟)

注意事项:

1. 本试卷考试时间为 120 分钟, 试卷满分 150 分, 考试形式闭卷.
2. 本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置, 否则不给分.
3. 答题前, 务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在试卷及答题卡上.

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $M = \{y | y = \sin x, x \in \mathbf{R}\}$, $N = \{y | y = 2^x, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $[-1, +\infty)$ B. $[-1, 0)$ C. $[0, 1]$ D. $(0, 1]$

【答案】D

【解析】 $M = \{y | y \in [-1, 1]\} = [-1, 1]$, $N = \{y | y > 0\}$, $M \cap N = \{y | 0 < y \leq 1\} = (0, 1]$, 选

D.

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 公比为 q , 已知 $a_1 = 1$, 则 $0 < q < 1$ 是数列 $\{a_n\}$ 单调递减的_____条件

- A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分又不必要

【答案】C

【解析】 $0 < q < 1$ 时, $a_{n+1} - a_n = a_1 q^n - a_1 q^{n-1} = a_1 q^{n-1}(q - 1) < 0$,

$\therefore a_{n+1} < a_n$, 即 $\{a_n\}$ 是单调递减数列, 充分.

若 $\{a_n\}$ 是单调递减数列, 则 $a_{n+1} < a_n$, 即 $a_1 q^n < a_1 q^{n-1}$,

$\therefore q^{n-1}(q - 1) < 0$ 对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ 都成立, $\therefore 0 < q < 1$, 必要.

\therefore 充分必要条件, 选 C.

3. 某中学高三(1)班有 50 名学生, 在一次高三模拟考试中, 经统计得: 数学成绩 $X \sim N(110, 100)$,

则估计该班数学得分大于 120 分的学生人数为

(参考数据: $P(|X-\mu|<\sigma)\approx 0.68$, $P(|X-\mu|<2\sigma)\approx 0.95$)

- A. 16 B. 10 C. 8 D. 2

【答案】C

【解析】 $P(X > 120) = P(X > \mu + \sigma) = \frac{1 - P(|X - \mu| < \sigma)}{2} = 0.16$

$50 \times 0.16 = 8$, 选 C.

4. 若 $f(\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha$ (i 为虚数单位), 则 $[f(\alpha)]^2 =$

- A. $f(\alpha)$ B. $f(2\alpha)$ C. $2f(\alpha)$ D. $f(\alpha^2)$

【答案】B

【解析】 $[f(\alpha)]^2 = \cos^2 \alpha + 2i \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha = f(2\alpha)$, 选 B.

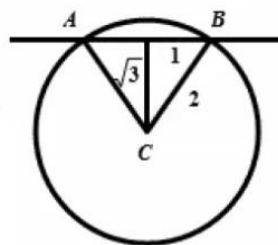
5. 已知直线 $\sqrt{2}x + y + a = 0$ 与 $\odot C: x^2 + (y-1)^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 且 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 则实数 $a =$

- A. -4 或 2 B. -2 或 4 C. $-1 \pm \sqrt{3}$ D. $-1 \pm \sqrt{6}$

【答案】A

【解析】 $\because \triangle ABC$ 为正三角形, $\therefore C$ 到 $|AB|$ 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$,

$\therefore \frac{|1+a|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, $\therefore a = 2$ 或 -4 , 选 A.



6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设 $A(1, 0)$, $B(3, 4)$, 向量 $\vec{OC} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$, $x + y = 6$, 则 $|\vec{AC}|$ 的最小值为

- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{5}$

【答案】D

【解析】 $\vec{OC} = (x + 3y, 4y)$, $\vec{AC} = (x + 3y - 1, 4y) = (5 + 2y, 4y)$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(5 + 2y)^2 + 16y^2} = \sqrt{20y^2 + 20y + 25}$$

$y = -\frac{1}{2}$ 时 $|\vec{AC}|$ 取最小值 $2\sqrt{5}$, 选 D.

7. 已知 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$), 则 $\tan \alpha + \tan \beta$ 的最小值为

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 1 C. $-2 - 2\sqrt{2}$ D. $-2 + 2\sqrt{2}$

【答案】 D

【解析】 $1 = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

$$1 - \tan \alpha \tan \beta = \tan \alpha + \tan \beta,$$

$$\tan \alpha \tan \beta = 1 - (\tan \alpha + \tan \beta) \leq \frac{(\tan \alpha + \tan \beta)^2}{4}$$

$$\therefore (\tan \alpha + \tan \beta)^2 + 4(\tan \alpha + \tan \beta) - 4 \geq 0,$$

$$\therefore \tan \alpha + \tan \beta \geq 2\sqrt{2} - 2, \text{ 选 D.}$$

8. 已知 $f(x) = \begin{cases} e^{x-4}, & x \leq 4 \\ (x-16)^2 - 143, & x > 4 \end{cases}$, 则当 $x \geq 0$ 时, $f(2^x)$ 与 $f(x^2)$ 的大小关系是

- A. $f(2^x) \leq f(x^2)$ B. $f(2^x) \geq f(x^2)$ C. $f(2^x) = f(x^2)$ D. 不确定

【答案】 B

【解析】 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $2^x \geq x^2$, 此时 $2^x \leq 4$, $x^2 \leq 4$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 4)$ 上

$$\therefore \text{此时 } f(2^x) \geq f(x^2).$$

当 $2 < x < 4$ 时, $2^x < x^2$, 此时 $4 < 2^x < 16$, $4 < x^2 < 16$, $f(x)$ 在 $(4, 16)$ 上

$$\therefore f(2^x) > f(x^2).$$

当 $x \geq 4$ 时, $2^x \geq x^2$, 此时 $2^x > 16$, $x^2 > 16$, $f(x)$ 在 $(16, +\infty)$ 上

综上: $f(2^x) \geq f(x^2)$, 选 B.

二、多项选择题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求的. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分)

9. 若函数 $f(x) = \cos 2x + \sin x$, 则关于 $f(x)$ 的性质说法正确的有

- A. 偶函数 B. 最小正周期为 π
C. 既有最大值也有最小值 D. 有无数个零点

【答案】 CD

【解析】 $f(-x) = \cos(-2x) + \sin(-x) = \cos 2x - \sin x \neq f(x)$,

$\therefore f(x)$ 不是偶函数, A 错.

$f(x + \pi) = \cos 2(x + \pi) + \sin(x + \pi) = \cos 2x - \sin x \neq f(x)$,

$\therefore f(x)$ 的最小正周期不是 π , B 错.

选 CD.

10. 若椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 则下列 b 的值, 能使以 F_1F_2 为直径的圆与椭圆 C 有公共点的有

A. $b = \sqrt{2}$

B. $b = \sqrt{3}$

C. $b = 2$

D. $b = \sqrt{5}$

【答案】 ABC

【解析】 以 F_1F_2 为直径的圆: $x^2 + y^2 = c^2$ 与椭圆有公共点, 则 $c^2 \geq b^2$,

即 $9 - b^2 \geq b^2$, $\therefore b^2 \leq \frac{9}{2}$, 即 $b \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 选 ABC.

11. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (-1)^{n-1}$, 记在数列 $\{a_n\}$ 的前 $n+2 (n \in \mathbf{N}^*)$ 项中任取两项都是正数的概率为 P_n , 则

A. $P_1 = \frac{1}{3}$

B. $P_{2n} < P_{2n+2}$

C. $P_{2n-1} < P_{2n}$

D. $P_{2n-1} + P_{2n} < P_{2n+1} + P_{2n+2}$

【答案】 AB

【解析】 $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$, $P_1 = \frac{1}{3}$, A 对.

前 $2n+2$ 项中有 $n+1$ 个正数, $n+1$ 个负数.

$$P_{2n} = \frac{C_{n+1}^2}{C_{2n+2}^2} = \frac{(n+1)n}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n}{2(2n+1)} = \frac{n}{4n+2}$$

$$P_{2n+2} - P_{2n} = \frac{n+1}{4n+6} - \frac{n}{4n+2} = \frac{2}{(4n+6)(4n+2)} > 0$$

$\therefore P_{2n+2} > P_{2n}$, B 对.

前 $2n+1$ 项中有 $n+1$ 个正数 , n 个负数.

$$P_{2n-1} = \frac{C_{n+1}^2}{C_{2n+1}^2} = \frac{(n+1)n}{(2n+1) \cdot 2n} = \frac{n+1}{4n+2}$$

$\therefore P_{2n-1} > P_{2n}$, C 错.

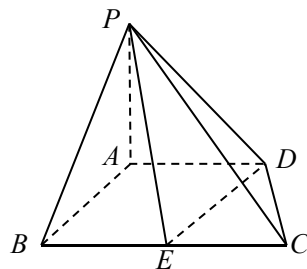
$$\begin{aligned} P_{2n+1} + P_{2n+2} - (P_{2n-1} + P_{2n}) &= P_{2n+2} - P_{2n} + P_{2n+1} - P_{2n-1} \\ &= \frac{2}{(4n+6)(4n+2)} + \frac{n+2}{4n+6} - \frac{n+1}{4n+2} = \frac{2}{(4n+6)(4n+2)} + \frac{-2}{(4n+6)(4n+2)} = 0 \end{aligned}$$

$\therefore P_{2n+1} + P_{2n+2} = P_{2n-1} + P_{2n}$, D 错.

选 AB.

12. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 已知 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AD \parallel BC$, $AB = AD = CD = 1$, $BC = PA = 2$, 记四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球为球 O , 平面 PAD 与平面 PBC 的角线为 l , BC 的中点为 E , 则

- A. $l \parallel BC$
- B. $AB \perp PC$
- C. 平面 $PDE \perp$ 平面 PAD
- D. l 被球 O 截得的弦长为 1



(第 12 题图)

【答案】 ABD

【解析】 法一: $BC \parallel AD$, $AD \subset$ 平面 PAD , $BC \not\subset$ 平面 PAD , $\therefore BC \parallel$ 平面 PAD , $BC \subset$ 平面 PBC , 平面 $PBC \cap$ 平面 $PAD = l$, $\therefore BC \parallel l$, A 对.

过 A, D 分别作 BC 的垂线, 垂足分别为 M, N

$$BM = CN = \frac{1}{2}, AM = DN = \frac{\sqrt{3}}{2}, \angle B = 60^\circ,$$

$$\triangle ABC \text{ 中, } AC^2 = 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3, \therefore AC \perp AB$$

又 $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore PA \perp AB$

$\therefore AB \perp$ 平面 PAC , $PC \subset$ 平面 PAC , $\therefore AB \perp PC$, B 对.

取 AD 中点 F , 则 $EF \perp AD$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $EF \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PA \perp EF$, $\therefore EF \perp$ 平面 PAD , $EF \not\subset$ 平面 PDE ,

\therefore 平面 PDE 与平面 PAD 不垂直 , C 错.

法二 : AB 选项判断如法一 ;

以 A 为坐标原点 , 以 AM, AD, AP 分别为 x, y, z 轴建系 ,

则平面 PAD 的一个法向量 $\vec{n}_1 = (1, 0, 0)$

设平面 PDE 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x, y, z)$, $P(0, 0, 2)$, $D(0, 1, 0)$, $E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{PD} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{PE} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} y - 2z = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$$

不妨设 $y = 1$, 则 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $z = \frac{1}{2}$, $\vec{n}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{1}{2}\right)$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \neq 0$, \therefore 两平面不垂直 , C 错.

设 l 与球两个交点为 P, Q , 即 Q 在球上 ,

四边形 $PADQ$ 是一个平面 , 外接圆是以 PD 为直径的圆 , $\therefore PG \perp QD$

$\therefore PADQ$ 为矩形 , $\therefore PQ = 1$, D 对.

选 ABD.

法三 : 对于 A , $\because BC \parallel AD$, $\therefore BC \parallel$ 平面 PAD ,

$\because BC \subset$ 平面 PBC , 平面 $PBC \cap$ 平面 $PAD = l$, $\therefore BC \parallel l$, A 正确.

对于 B , $\because AB \subset$ 平面 $ABCD$, PC 是平面 $ABCD$ 的一条斜线 ,

$\therefore PC$ 在平面 $ABCD$ 内的射影 $AC \perp AB$,
 \therefore 由三垂线定理知 $AB \perp PC$, B 正确.

对于 C , 过 A 作 $AF \perp PD$, 若平面 $PDE \perp$ 平面 PAD ,

则 $AF \perp$ 平面 $PDE \Rightarrow AF \perp DE$, 又 $\because DE \perp PA$,

$\therefore DE \perp$ 平面 $PAD \Rightarrow DE \perp AD$, 而 $\angle ADE = 60^\circ$, 矛盾 , 故 C 错.

对于 D , 底面四边形 E , 过 E 作 $EQ \perp$ 平面 $ABCD$,

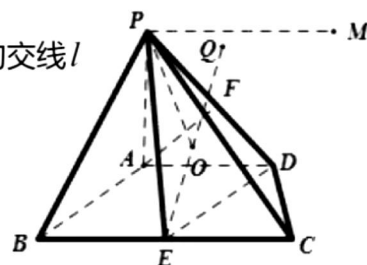
\therefore 四棱锥 $P-ABCD$ 外接球球心 O 一定在 EQ 上 ,

设 $EO = x$, 由 $OP = OB \Rightarrow (2-x)^2 + 1 = x^2 + 1 \Rightarrow x = 1$

过 P 作 $PM \parallel AD$, 则易知 PM 为平面 PAD 与平面 PBC 的交线 l

O 到 PM 的距离 $d = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $R = \sqrt{2}$,

$\therefore l$ 被 O 截得的弦长为 $2\sqrt{R^2 - d^2} = 1$, D 正确 , 选 ABD.



第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 若 $f(x) = (x+3)^5 + (x+m)^5$ 是奇函数, 则 $m =$ _____.

【答案】 -3

【解析】 $f(x)$ 为奇函数, $f(0) = 3^5 + m^5 = 0$, $m = -3$

$m = -3$ 时, $f(x) = 2(x^5 + 90x^3 + 5 \times 3^4 x)$ 是奇函数, $\therefore m = -3$.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a = 3b$, 则 $\cos B$ 的最小值是_____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【解析】 $a = 3b$, $\sin A = 3\sin B$, $\sin(B+C) = 3\sin B$

$$\sin B \cos C + \sin C \cos B = 3 \sin B, \tan B \cos C + \sin C = 3 \tan B$$

$$\therefore \tan B = \frac{\sin C}{3 - \cos C} = x, \sin C = 3x - x \cos C$$

$$x \cos C + \sin C = 3x \leq \sqrt{x^2 + 1}, \text{ 即 } x^2 \leq \frac{1}{8}$$

$$\therefore \tan B \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}, \therefore \cos B \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

15. 计算机是二十世纪最伟大的发明之一，被广泛地应用于人们的工作于生活之中，计算机在进行数的计算处理时，使用的是二进制. 一个十进制数 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 可以表示成二进制数 $(a_0 a_1 a_2 \cdots a_k)_2, k \in \mathbf{N}$, 则 $n = a_0 \cdot 2^k + a_1 \cdot 2^{k-1} + a_2 \cdot 2^{k-2} + \cdots + a_k \cdot 2^0$, 其中 $a_0 = 1$, 当 $i \geq 1$ 时, $a_i \in \{0, 1\}$. 若记 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中 1 的个数为 $f(n)$, 则满足 $k=6, f(n)=3$ 的 n 的个数为_____.

【答案】 15

【解析】法一： $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 中 1 的个数为 3,

则 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 中 1 的个数为 2, $C_6^2 = 15$, $\therefore n$ 有 15 个.

法二： 只需 a_1, a_2, \cdots, a_6 中有两个 1 即可, $\therefore n$ 的个数为 $C_6^2 = 15$.

16. 已知：若函数 $f(x), g(x)$ 在 \mathbf{R} 上可导, $f(x)=g(x)$, 则 $f'(x)=g'(x)$. 又英国数学家泰勒发现了一个

恒等式 $e^{2x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$, 则 $a_0 =$ _____, $\sum_{n=1}^{10} \frac{a_{n+1}}{n a_n} =$ _____. (第一

空 2 分, 第二空 3 分)

【答案】 1; $\frac{20}{11}$

【解析】法一： $x=0$ 时, $e^0 = a_0$, 即 $a_0 = 1$,

$$2e^{2x} = (e^{2x})' = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

$x=0$ 时, $2 = a_1$, 即 $a_1 = 2$

$$4e^{2x} = (2e^{2x})' = 2a_2 + 6a_3x + \cdots + (n-1)na_nx^{n-2} + \cdots$$

$$\therefore x=0 \text{ 时 } , 4 = 2a_2 , \text{ 即 } a_2 = 2$$

$$8e^{2x} = (4e^{2x})' = 6a_3 + 24a_4x + \cdots + (n-1)na_n(n-2)x^{n-3} + \cdots$$

$$\therefore x=0 \text{ 时 } , 8 = 6a_3 , \text{ 即 } a_3 = \frac{4}{3}$$

$$\therefore 16 = 24a_4 , \text{ 即 } a_4 = \frac{2}{3}$$

$$2^5 = 32 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 a_5 , \therefore a_n = \frac{2^n}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{na_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} = \frac{2}{(n+1)n} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{a_{n+1}}{na_n} = 2 - \frac{2}{11} = \frac{20}{11}.$$

法二： $x=0 \Rightarrow a_0=1$

$$e^{2x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

$$\therefore 2e^{2x} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots$$

$$\therefore 2a_n = (n+1)a_{n+1} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} \frac{a_{n+1}}{na_n} = \sum_{i=1}^{10} \frac{2}{n(n+1)} = \sum_{i=1}^{10} 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) = \frac{20}{11} ,$$

故应填：1； $\frac{20}{11}$ 。

四、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

从① $\sin D = \sin A$; ② $S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle BCD}$; ③ $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = -4$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并完成解答.

已知点 D 在 $\triangle ABC$ 内, $\cos A > \cos D$, $AB = 6$, $AC = BD = 4$, $CD = 2$, 若 _____, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

注: 选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

【解析】

选①.

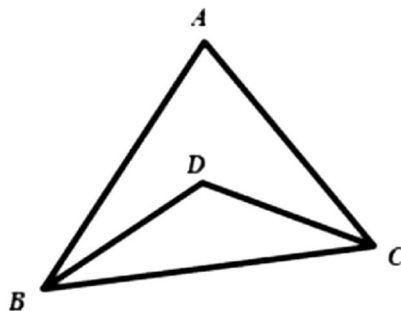
$\because \sin D = \sin A$, 而 D 在 $\triangle ABC$ 内, $\therefore D > A$, 而 $\cos A > \cos D$, $D = \pi - A$

$\therefore A$ 为锐角, D 为钝角, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 中分别由余弦定理

$$\Rightarrow BC^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \cos A = 16 + 4 - 2 \times 4 \times 2 \cos(\pi - A)$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{2}, \therefore A = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$



若选②,

$$\text{由 } S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle BCD} \Rightarrow \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \sin A = 3 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \sin D$$

$\Rightarrow \sin A = \sin D$, 以下同①.

$$\text{若选③, } \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = -4 \Rightarrow 4 \times 2 \cos D = -4 \Rightarrow \cos D = -\frac{1}{2}, D = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore BC = \sqrt{16 + 4 - 2 \times 4 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{7}$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理} \Rightarrow \cos A = \frac{36 + 16 - 28}{2 \times 6 \times 4} = \frac{1}{2}, A = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n + 4$ ，数列 $\{b_n\}$ 的首项为 $b_1 = 2$ 。

(1) 若 $\{b_n\}$ 是公差为 3 的等差数列，求证： $\{a_n\}$ 也是等差数列；

(2) 若 $\{a_{b_n}\}$ 是公比为 2 的等比数列，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和。

【解析】

$$(1) \quad b_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1, \therefore a_{b_n} = 2b_n + 4 = 2(3n - 1) + 4 = 6n + 2$$

$\therefore a_{b_{n+1}} - a_{b_n} = 6(n+1) + 2 - (6n + 2) = 6$ 为常数，故 $\{a_{b_n}\}$ 也是等差数列。

$$(2) \quad \text{由题意知 } a_{b_n} = a_{b_1} \cdot 2^{n-1} = 8 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+2}$$

$$\therefore 2b_n + 4 = 2^{n+2}, \therefore b_n = 2^{n+1} - 2,$$

$$\therefore \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } \frac{4(1-2^n)}{1-2} - 2n = 2^{n+2} - 2n - 4.$$

19. (本小题满分 12 分)

佩戴头盔是一项对家庭与社会负责的表现，某市对此不断进行安全教育。下表是某市某主干路口连续 4 年监控设备抓拍到的驾驶员不戴头盔的统计数据：

年度	2018	2019	2020	2021
年度序号 x	1	2	3	4
不戴头盔人数 y	1250	1050	1000	900

(1) 请利用所给数据求不戴头盔人数 y 与年度序号 x 之间的回归直线方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ，并估算该路口 2022 年不戴头盔的人数；

(2) 交警统计 2018~2021 年通过该路口的开电瓶车出事故的 50 人，分析不戴头盔行为与事故是否伤亡的关系，得到右表，能否有 95% 的把握认为不戴头盔行为与事故伤亡有关？

	不戴头盔	戴头盔
伤亡	7	3
不伤亡	13	27

$$\text{参考公式: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n=a+b+c+d.$$

【解析】

$$(1) \bar{x} = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{5}{2}, \bar{y} = \frac{1250+1050+1000+900}{4} = 1050$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i y_i = 1250 + 2 \times 1050 + 3 \times 1000 + 4 \times 900 = 9950$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30,$$

$$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i y_i - 4 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^4 x_i^2 - 4 \bar{x}^2} = \frac{9950 - 4 \times \frac{5}{2} \times 1050}{30 - 4 \times \frac{25}{4}} = -110$$

$$\therefore \hat{y} = \hat{b}x + \hat{a} \text{ 必过样本中心 } \left(\frac{5}{2}, 1050 \right)$$

$$\therefore \hat{a} = 1050 + 110 \times \frac{5}{2} = 1325, \therefore \text{回归直线方程为 } \hat{y} = -110x + 1325$$

$$\therefore 2022 \text{ 年不带头盔的人数为: } y = -110 \times 5 + 1325 = 775 \text{ 人.}$$

(2) 2×2 列联表如下:

	不戴头盔	戴头盔	总计
伤亡	7	3	10
不伤亡	13	27	40
总计	20	30	50

$$\therefore K^2 = \frac{50 \times (7 \times 27 - 3 \times 13)^2}{10 \times 40 \times 20 \times 30} \approx 4.688 > 3.841$$

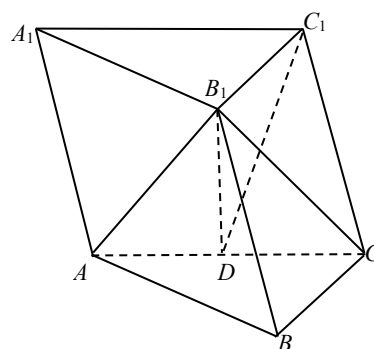
\therefore 有 95% 的把握认为不带头盔行为与事故伤亡有关

20. (本小题满分 12 分)

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1=13$, $AB=8$, $BC=6$, $AB \perp BC$, $AB_1=B_1C$, D 为 AC 中点, 平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABC .

(1) 求证: $B_1D \perp$ 平面 ABC ;

(2) 求直线 C_1D 与平面 A_1BC 所成角的正弦值.



(第 20 题图)

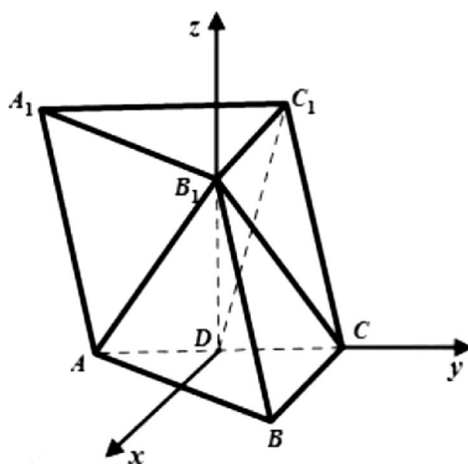
【解析】

(1) 证明: $\because AB_1 = B_1C$, D 为 AC 的中点, $\therefore B_1D \perp AC$,

又 \because 平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABC , 平面 $AB_1C \cap$ 平面 $ABC = AC$, $B_1D \subset$ 平面 AB_1C

$B_1D \perp AC$, $\therefore B_1D \perp$ 平面 ABC .

(2) 如图建立空间直角坐标系, 由 $AB=8$, $BC=6$, $AB \perp BC \Rightarrow AC=10$



$\therefore AD=5$, $\because AA_1=BB_1=13$, $\therefore B_1D=12$, $\therefore B_1(0,0,12)$

$D(0,0,0)$, $B\left(\frac{24}{5}, \frac{7}{5}, 0\right)$, $C(0,5,0)$, 由 $\overline{B_1C_1} = \overline{BC} \Rightarrow C_1\left(-\frac{24}{5}, \frac{18}{5}, 12\right)$

$\therefore \overline{C_1D} = \left(\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}, -12\right)$, 设平面 AB_1C 的一个法向量为 \vec{n} , $\therefore \vec{n} = (1, 0, 0)$

设 C_1D 与平面 ABC 所成角为 θ , $\overrightarrow{C_1D}$ 与 \vec{n} 所成角为 φ ,

$$\therefore \sin \theta = |\cos \varphi| = \frac{\left| \overrightarrow{C_1D} \cdot \vec{n} \right|}{\left| \overrightarrow{C_1D} \right| \left| \vec{n} \right|} = \frac{\frac{24}{5}}{6\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{25}$$

21. (本小题满分 12 分)

(1) 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的右顶点为 A , 虚轴长为 $\sqrt{2}$, 两准线间的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 设动直线 l 与双曲线 C 交于 P 、 Q 两点, 已知 $AP \perp AQ$, 设点 A 到动直线 l 的距离为 d , 求 d 的最大值.

【解析】

【解析】法一:

$$(1) \text{ 由题意知 } \begin{cases} b = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2a^2}{c} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

\therefore 双曲线 C 的方程为 $x^2 - 2y^2 = 1$.

(2) 当直线 l 斜率存在时, 设直线 l 方程为 $y = kx + m$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $A(1, 0)$

$$\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (1 - 2k^2)x^2 - 4kmx - 2m^2 - 1 = 0, \quad 1 - 2k^2 \neq 0, \quad \Delta > 0,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{4km}{1 - 2k^2} \\ x_1 x_2 = \frac{-2m^2 - 1}{1 - 2k^2} \end{cases}$$

$$\because AP \perp AQ, \therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0 \Rightarrow (x_1 - 1, y_1) \cdot (x_2 - 1, y_2) = 0$$

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) + y_1 y_2 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = 0$$

$$\therefore (1+k^2)x_1x_2 + (km-1)(x_1+x_2) + m^2+1=0$$

$$\therefore (1+k^2) \cdot \frac{-2m^2-1}{1-2k^2} + (km-1) \cdot \frac{4km}{1-2k^2} + m^2+1=0$$

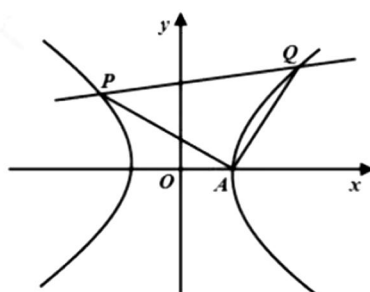
$$-2m^2-1-2k^2m^2-k^2+4k^2m^2-4km+m^2+1-2k^2m^2-2k^2=0$$

$$\therefore 3k^2+m^2+4km=0 \Rightarrow (3k+m)(k+m)=0$$

$\therefore m=-k$ 或 $m=-3k$, 当 $m=-k$ 时, 直线 PQ 恒过 $A(1,0)$, 舍去

$\therefore m=-3k$, 此时直线 l 方程为: $y=k(x-3)$ 恒过 $M(3,0)$

②当 l 斜率不存在时, 设 $P(x_0, y_0), Q(x_0, -y_0)$, 此时 $\overrightarrow{AP} = (x_0-1, y_0)$, $\overrightarrow{AQ} = (x_0-1, -y_0)$



$$(x_0-1)^2 - y_0^2 = 0 \Rightarrow 2(x_0-1)^2 - x_0^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 1 \text{ 或 } 3$$

当 $x_0=1$ 时, P, Q 重合于 A 点, 舍去, $\therefore x_0=3$

\therefore 直线 l 恒过 $M(3,0)$, $\therefore d$ 的最大值为 $AM=2$.

法二:

$$(1) \text{ 依题意有 } b = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2a^2}{c} = \frac{2\sqrt{6}}{3}, \text{ 解得 } a^2 = 1,$$

所以双曲线 C 的方程为 $x^2 - 2y^2 = 1$;

(2) 由 (1) 可知 $A(1,0)$, 依题意可知 $k_{AP} \cdot k_{AQ} = -1$,

设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

$$\text{则有 } k_{AP} = \frac{y_1}{x_1-1} = \frac{x_1+1}{2y_1}, k_{AQ} = \frac{y_2}{x_2-1} = \frac{x_2+1}{2y_2},$$

$$\text{所以 } \frac{y_1}{x_1-1} \cdot \frac{x_2+1}{2y_2} = -1, \quad \frac{x_1+1}{2y_1} \cdot \frac{y_2}{x_2-1} = -1,$$

$$\text{化简得 } x_2y_1 + 2x_1y_2 = 2y_2 - y_1, \quad x_1y_2 + 2x_2y_1 = 2y_1 - y_2,$$

$$\text{作差得 } x_2y_1 - x_1y_2 = 3(y_1 - y_2),$$

$$\text{又 } PQ \text{ 方程为 } (x_2 - x_1)y = (y_2 - y_1)x + x_2y_1 - x_1y_2,$$

$$\text{所以可知 } PQ \text{ 过定点 } M(3, 0),$$

$$\text{则有 } d \leq AM = 2, \text{ 即 } d \text{ 的最大值为 } 2.$$

22. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = -3\ln x + x^3 + ax^2 - 2ax$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(2) 若 x_1, x_2 为函数 $f(x)$ 的两个不等于 1 的极值点, 设 $P(x_1, f(x_1)), Q(x_2, f(x_2))$, 记直线 PQ 的斜率为 k , 求证: $k+2 < x_1+x_2$.

【解析】法一:

$$(1) f'(x) = -\frac{3}{x} + 3x^2 + 2ax - 2a, \text{ 切点 } (1, 1-a),$$

$$\text{切线斜率 } k = f'(1) = 0, \text{ 切线方程为 } y = 1 - a.$$

$$\begin{aligned} (2) f'(x) &= \frac{3x^3 - 3 + 2ax(x-1)}{x} = \frac{3(x-1)(x^2 + x + 1) + 2ax(x-1)}{x} \\ &= \frac{(x-1)[3x^2 + (3+2a)x + 3]}{x} \end{aligned}$$

$\because x_1, x_2$ 为函数 $f(x)$ 的两个不等于 1 的极值点,

$\therefore 3x^2 + (3+2a)x + 3 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不等于 1 的正根,

$$\therefore \begin{cases} \Delta = (3+2a)^2 - 36 > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{3+2a}{3} > 0 \Rightarrow a < -\frac{9}{2}, \text{ 不妨设 } x_1 < x_2, \therefore 0 < x_1 < 1 < x_2 \\ x_1x_2 = 1 \end{cases}$$

$$k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-3\ln x_2 + x_2^3 + ax_2^2 - 2ax_2 + 3\ln x_1 - x_1^3 - ax_1^2 + 2ax_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-3\ln \frac{x_2}{x_1} + (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) + a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) - 2a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-3\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} + (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 + a(x_2 + x_1) - 2a$$

$$= \frac{-3\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} + (x_1 + x_2)^2 - 1 - \frac{3}{2}(x_1 + x_2)^2 - \frac{3}{2}(x_1 + x_2) + 3(x_1 + x_2) + 3$$

$$= \frac{-3\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{3}{2}(x_1 + x_2) + 2$$

$$\Leftrightarrow \text{证明: } \frac{-3\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + 4 < 0$$

$$\text{而显然 } \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} > \frac{2}{x_1 + x_2}, \therefore \frac{-3(\ln x_2 - \ln x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{-6}{x_1 + x_2}$$

$$\text{下只需证 } \frac{-6}{x_1 + x_2} - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + 4 < 0$$

$$\text{令 } x_1 + x_2 = t, t > 2, \therefore \Leftrightarrow \text{证 } \frac{-6}{t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + 4 < 0$$

$$\text{即证: } -t^3 + t^2 + 8t - 12 < 0, \text{ 令 } g(t) = -t^3 + t^2 + 8t - 12,$$

$$g'(t) = -3t^2 + 2t + 8 = -(3t + 4)(t - 2) < 0, \therefore g(t) \text{ 在 } (2, +\infty) \text{ 上 } \searrow, \therefore g(t) < g(2) = 0,$$

证毕!

法二：(1) 由 $f'(x) = -\frac{3}{x} + 3x^2 + 2ax - 2a$ ，有 $f'(1) = 0$ ，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=1-a$ ；

(2) 由 $f'(x) = \frac{(x-1)[3x^2 + (3+2a)x + 3]}{x}$ ，

所以 x_1, x_2 为方程 $3x^2 + (3+2a)x + 3 = 0$ 的两根，

则有 $x_1x_2 = 1$ ， $x_1 + x_2 = -\frac{3+2a}{3}$ ，

又有 $k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_2 - x_1} + a(x_2 + x_1) - 2a + x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$

$$= \frac{3(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_2 - x_1} - \frac{3}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{3}{2}(x_1 + x_2) + x_2^2 + x_1^2 + x_1x_2 + 3$$

记 $t = x_1 + x_2$ ，即证 $\frac{3(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_2 - x_1} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 4 < t$ ，

由 ALG 不等式有 $\frac{3(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_2 - x_1} < -\frac{6}{t}$ ，

所以只需证 $\frac{1}{2}t^2 + \frac{6}{t} - \frac{t}{2} - 4 > 0$ ，即证 $\frac{(t-2)^2(t+3)}{2t} > 0$ ，成立，