

江苏省仪征中学 2018—2019 学年第二学期 期末复习讲义 (5)

1. 函数 $f(x) = \frac{\ln(2x-x^2)}{x-1}$ 的定义域为_____
2. 在 $(x - \frac{1}{2x})^6$ 的展开式中, 常数项的值为_____
3. 若 $(3x + \sqrt{7})^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, 则 $(a_0 + a_2 + a_4)^2 - (a_1 + a_3)^2$ 的值为_____
4. 在 $(1+x)^6(1+y)^4$ 的展开式中, 记 $x^m y^n$ 项的系数为 $f(m, n)$, 则 $f(3, 0) + f(2, 1) + f(0, 3) =$ _____
5. 某班某天要安排语文、数学、英语、物理、生物、体育 6 节课, 要求数学课排在前 3 节, 体育课不排在第 1 节, 则不同的排法种数为_____. (以数字作答)
6. 函数 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 有 3 个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是_____
7. 设点 P 是曲线 $y = \ln x$ 图象上任意一点, 则点 P 到直线 $y = x$ 的最短距离是_____
8. 已知 $f(x) = xe^x$, $g(x) = -(x+1)^2 + a$, 若 $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 成立, 则 a 的取值范围是_____
9. 若函数 $f(x) = e^x(-x^2 + 2x + a)$ 在区间 $[a, a+1]$ 上单调递增, 则实数 a 的最大值为_____
10. 若 $(1+2x)^{2018} = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \cdots + a_{2017}(x+1)^{2017} + a_{2018}(x+1)^{2018}$
($x \in \mathbb{R}$), 则 $a_0 + a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 2017a_{2017} + 2018a_{2018}$ 的值为_____
11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ 2^x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x) + x - a$ 有且只有一个零点, 则实数 a 的取值范围为_____
12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_4 x|, & 0 < x \leq 4 \\ x^2 - 10x + 25, & x > 4 \end{cases}$, 若 a, b, c, d 是互不相同的正数, 且 $f(a) = f(b) = f(c) = f(d)$, 则 $abcd$ 的取值范围是_____

13. 已知 z 为复数, $z+2i$ 和 $\frac{z}{2-i}$ 均为实数, 其中 i 是虚数单位.

(1) 求复数 z ;

(2) 若复数 $(z+ai)^2$ 在复平面上对应的点在第一象限, 求实数 a 的取值范围.

14. 某市度假村有一特色星空酒店, 该酒店由多座帐篷构成. 每一座帐篷的体积为 $54\pi m^3$,

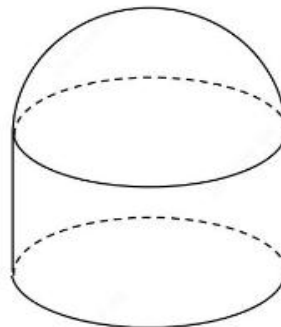
且分上下两层, 其中上层是半径为 $r m$ ($r \geq 1$) 的半球体, 下层是半径为 $r m$, 高为 $h m$ 的圆柱体 (如图 2). 经测算, 上层半球体部分每平方米的建造费用为 2 千元, 下方圆柱体的侧面、隔层和地面三个部分平均每平方米建造费用为 3 千元. 设每一座帐篷的建造总费用为 y 千元.

(1) 求 y 关于的 r 函数解析式, 并指出该函数的定义域;

(2) 当半径 r 为何值时, 一座帐篷的总建造费用最小, 并求出最小值.



(图 1)



(图 2)

15. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ，其中 e 为自然对数底数.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并加以证明；

(2) 判断函数 $f(x)$ 的单调性，并用定义证明；

(3) 设 $A = \{x \mid f(x^2 + 3) + f(5 - 6x) \leq 0\}$ ，若 $\exists x \in A, \ln x - tx = 0$ ，求实数 t 的取值范围.

16. 已知函数 $f(x) = x \ln x - (k+1)x$, $k \in R$.

(1) 若 $k = -1$, 求 $f(x)$ 的最值;

(2) 若对于任意 $x \in [e, e^3]$, 都有 $f(x) < 4 \ln x$ 成立, 求实数 k 的取值范围;

(3) 若对于任意 $x \in [2, e^2]$, 都有 $f(x) > -2x - k$ 成立, 求整数 k 的最大值.

江苏省仪征中学 2018—2019 学年第二学期 期末复习讲义 (5)

(教师版)

- 函数 $f(x) = \frac{\ln(2x-x^2)}{x-1}$ 的定义域为_____ . $(0,1) \cup (1,2)$
- 在 $(x - \frac{1}{2x})^6$ 的展开式中, 常数项的值为_____ $-\frac{5}{2}$
- 若 $(3x + \sqrt{7})^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, 则 $(a_0 + a_2 + a_4)^2 - (a_1 + a_3)^2$ 的值为_____ 16
- 在 $(1+x)^6(1+y)^4$ 的展开式中, 记 $x^m y^n$ 项的系数为 $f(m,n)$, 则 $f(3,0) + f(2,1) + f(0,3) =$ _____. 84
- 某班某天要安排语文、数学、英语、物理、生物、体育 6 节课, 要求数学课排在前三节, 体育课不排在第 1 节, 则不同的排法种数为_____. (以数字作答). 312
- 函数 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 有 3 个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是_____ $(-2,2)$
- 设点 P 是曲线 $y = \ln x$ 图象上任意一点, 则点 P 到直线 $y = x$ 的最短距离是_____ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 已知 $f(x) = xe^x$, $g(x) = -(x+1)^2 + a$, 若 $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 成立, 则 a 的取值范围是_____ $[-\frac{1}{e}, +\infty)$
- 若函数 $f(x) = e^x(-x^2 + 2x + a)$ 在区间 $[a, a+1]$ 上单调递增, 则实数 a 的最大值为_____ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
- 若 $(1+2x)^{2018} = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \cdots + a_{2017}(x+1)^{2017} + a_{2018}(x+1)^{2018}$ ($x \in \mathbb{R}$), 则 $a_0 + a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 2017a_{2017} + 2018a_{2018}$ 的值为_____ 4037
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ 2^x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x) + x - a$ 有且只有一个零点, 则实数 a 的取值范围为_____. $a > 2$
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_4 x|, & 0 < x \leq 4 \\ x^2 - 10x + 25, & x > 4 \end{cases}$, 若 a, b, c, d 是互不相同的正数, 且 $f(a) = f(b) = f(c) = f(d)$, 则 $abcd$ 的取值范围是_____ $(24, 25)$

13. 已知 z 为复数, $z+2i$ 和 $\frac{z}{2-i}$ 均为实数, 其中 i 是虚数单位.

(1) 求复数 z ;

(2) 若复数 $(z+ai)^2$ 在复平面上对应的点在第一象限, 求实数 a 的取值范围.

解: (1) 设复数 $z = a+bi$, 则 $z+2i = a+(b+2)i$ 为实数,

所以 $b+2=0$, 即 $b=-2$. -----3 分

又 $\frac{z}{2-i} = \frac{a-2i}{2-i} = \frac{(a-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2a+2+(a-4)i}{5}$ 为实数,

所以 $a-4=0$, 即 $a=4$, 则复数 $z = 4-2i$. -----7 分

(2) 由 (1) 可得 $z = 4-2i$

则 $(z+ai)^2 = (4+(a-2)i)^2 = 16-(a-2)^2 + 8(a-2)i$ 对应点在第一象限, -----10 分

所以 $\begin{cases} 16-(a-2)^2 > 0 \\ 8(a-2) > 0 \end{cases}$, 解得 $2 < a < 6$. -----14 分

14. 某市度假村有一特色星空酒店, 该酒店由多座帐篷构成. 每一座帐篷的体积为 $54\pi \text{ m}^3$,

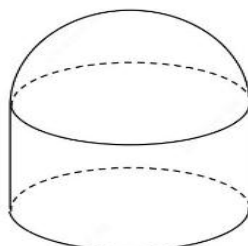
且分上下两层, 其中上层是半径为 $r \text{ m}$ ($r \geq 1$) 的半球体, 下层是半径为 $r \text{ m}$, 高为 $h \text{ m}$ 的圆柱体 (如图 2). 经测算, 上层半球体部分每平方米的建造费用为 2 千元, 下方圆柱体的侧面、隔层和地面三个部分平均每平方米建造费用为 3 千元. 设每一座帐篷的建造总费用为 y 千元.

(1) 求 y 关于的 r 函数解析式, 并指出该函数的定义域;

(2) 当半径 r 为何值时, 一座帐篷的总建造费用 最小, 并求出最小值.



(图 1)



(图 2)

(1) 由题意, $\frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 54\pi$,

所以 $h = \frac{54}{r^2} - \frac{2}{3}r$.

所以 $y = 2\pi r^2 \times 2 + 2\pi r^2 \times 3 + 2\pi r h \times 3$

$= 10\pi r^2 + 6\pi r \cdot \left(\frac{54}{r^2} - \frac{2}{3}r\right)$,

14、

化简可得, $y = 6\pi\left(r^2 + \frac{54}{r}\right)$.

又因为 $h > 0$, $r \geq 1$, 解 $\frac{54}{r^3} - \frac{2}{3}r > 0$, 得 $1 \leq r < 3\sqrt[3]{3}$.

即函数的定义域为 $\{r | 1 \leq r < 3\sqrt[3]{3}\}$.

(2) 设 $g(r) = r^2 + \frac{54}{r}$, $1 \leq r < 3\sqrt[3]{3}$,

$$\text{则 } g'(r) = 2r - \frac{54}{r^2} = \frac{2(r-3)(r^2+3r+9)}{r^2},$$

令 $g'(r) = 0$, 得 $r = 3$.

列表如下: (略)

所以当 $r = 3$ 时, $g(r)$ 取得最小值, 且最小值为 18.

所以原函数当 $r = 3$ 时, 取得最小值为 162π1

答: 半径 r 为 3m 时, 一座帐篷的总建造费用最小, 且最小值为 162π 千元

15. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, 其中 e 为自然对数底数.

- (1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并加以证明;
- (2) 判断函数 $f(x)$ 的单调性, 并用定义证明;
- (3) 设 $A = \{x | f(x^2 + 3) + f(5 - 6x) \leq 0\}$, 若 $\exists x \in A, \ln x - tx = 0$, 求实数 t 的取值范围.

解: (1) 函数定义域为 $\mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -f(x)$

所以函数 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $x_1 < x_2$, 则

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{e^{x_2} - 1}{e^{x_2} + 1} - \frac{e^{x_1} - 1}{e^{x_1} + 1} = \left(1 - \frac{2}{e^{x_2} + 1}\right) - \left(1 - \frac{2}{e^{x_1} + 1}\right) = \frac{2(e^{x_2} - e^{x_1})}{(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} + 1)}$$

$$\because e > 1, x_1 < x_2 \therefore e^{x_2} > e^{x_1} > 0 \therefore e^{x_2} - e^{x_1} > 0, (e^{x_1} + 1)(e^{x_2} + 1) > 0$$

$$\therefore f(x_2) - f(x_1) > 0 \text{ 即 } f(x_1) < f(x_2) \quad \text{所以 } f(x) \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上单调递增}$$

(3) $\because$ 函数 $f(x)$ 是奇函数, 故不等式 $f(x^2 + 3) + f(5 - 6x) \leq 0$ 可化为

$$f(x^2 + 3) \leq -f(5 - 6x) = f(6x - 5)$$

由 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增得: $x^2 + 3 \leq 6x - 5 \therefore 2 \leq x \leq 4$

即 $A = \{x | 2 \leq x \leq 4\}$ 10 分

“ $\exists x \in A, \ln x - tx = 0$ ” 等价于 “ $\exists x \in A, t = \frac{\ln x}{x}$ ”

$$\text{设 } h(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (2 \leq x \leq 4), \quad h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad \text{令 } h'(x) = 0 \text{ 得 } x = e$$

当 $2 \leq x < e$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增;
 当 $e < x \leq 4$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减;
 又 $h(2) = \frac{\ln 2}{2}$, $h(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$, 故 $h(x) \in [\frac{\ln 2}{2}, \frac{1}{e}]$ 所以, $t \in [\frac{\ln 2}{2}, \frac{1}{e}]$

16. 已知函数 $f(x) = x \ln x - (k+1)x$, $k \in R$.

- (1) 若 $k = -1$, 求 $f(x)$ 的最值;
- (2) 若对于任意 $x \in [e, e^3]$, 都有 $f(x) < 4 \ln x$ 成立, 求实数 k 的取值范围;
- (3) 若对于任意 $x \in [2, e^2]$, 都有 $f(x) > -2x - k$ 成立, 求整数 k 的最大值.

解 (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

因为 $k = -1$, 所以 $f(x) = x \ln x$, $f'(x) = \ln x + 1$. 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{e}$

列表如下: (略) 所以, $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{e}$, 没有最大值;4 分

(2) 对于任意 $x \in [e, e^3]$, 都有 $f(x) < 4 \ln x$ 成立,

等价于对于任意 $x \in [e, e^3]$, 都有 $k+1 > (1 - \frac{4}{x}) \ln x$ 成立,6 分

令 $g(x) = (1 - \frac{4}{x}) \ln x$, 所以 $g'(x) = \frac{x-4+4 \ln x}{x^2}$.

因为 $x \in [e, e^3]$, 所以 $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $x \in [e, e^3]$ 时单调递增.8 分

因为 $g(x)$ 在 $x \in [e, e^3]$ 时的最大值是 $g(e^3) = 3 - \frac{12}{e^3}$.

所以, 实数 k 的取值范围是 $(2 - \frac{12}{e^3}, +\infty)$;10 分

(3) 对于任意 $x \in [2, e^2]$, 都有 $f(x) > -2x - k$ 成立,

即对于任意 $x \in [2, e^2]$, 都有 $(\ln x - k - 1)x > -2x - k$ 成立,

因为 $x \in [2, e^2]$, 所以 $(\ln x - k - 1)x > -2x - k$ 等价于 $k < \frac{x \ln x + x}{x-1}$12 分

令 $h(x) = \frac{x \ln x + x}{x-1}$, 所以 $h'(x) = \frac{-\ln x + x - 2}{(x-1)^2}$.

令 $p(x) = -\ln x + x - 2$, 求得 $p'(x) = \frac{x-1}{x}$.

当 $x \in [2, e^2]$ 时所以 $p'(x) > 0$, $p(x)$ 在 $x \in [2, e^2]$ 上单调递增.

因为 $p(3) = 1 - \ln 3 < 1 - \ln e = 0$, $p(4) = 2 - 2 \ln 2 > 2 - 2 \ln e = 0$, 且 $p(x)$ 图像不间断,

所以 $p(x)$ 在区间 $(3, 4)$ 内有唯一零点,14 分

设唯一零点为 x_0 , 则 $x_0 \in (3, 4)$, 且 $p(x_0) = -\ln x_0 + x_0 - 2 = 0$, 即 $\ln x_0 = x_0 - 2$.

所以, $h(x)$ 在 $[2, x_0]$ 上单调递减, 在 $[x_0, e^2]$ 上单调递增, $h(x)$ 在 $x = x_0$ 时取到最小值 $h(x_0)$.

因为 $\ln x_0 = x_0 - 2$, 所以 $h(x_0) = \frac{x_0 \ln x_0 + x_0}{x_0 - 1} = x_0$,

所以整数 k 的最大值为 3.16 分