江苏省仪征中学 2018~2019 学年第二学期期末模拟试卷（一）

高二数学周三文

一、填空题（本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分．不需要写出解答过程，请将答案填写在答题卡相应的位置上．）

1.已知集合 $A=\{2\}$，$B=\{1,a^2\}$，若 $A\cup B=\{0,1,2\}$,则实数 $a=$________.

2.已知 i 是虚数单位，则 $|1-2i|=$________.

3.若幂函数 $f(x)=x^a$ 的图像经过点 $\left(3,\sqrt{3}\right)$，则实数 $a=$________.

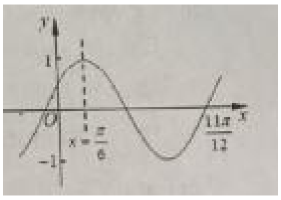
4.若点 $P(3cos\theta,sin\theta)$ 在直线 $l{:}x+y=0$ 上，则 $tan\theta=$________.

5.若函数 $y=f(x)$ 的图像经过点（1,2），则 $y=f(-x)+1$ 的图像必经过的点坐标是_______.

6. 已知 i 是虚数单位，则复数 $z=\dfrac{2-i}{1+i}$ 的共轭复数是_______.

7.直线 $3x+4y-3=0$ 与直线 $6x+my+12=0$ 平行，则它们之间的距离是_______.

8.已知函数 $f(x)=Asin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图像如图所示，则对应的函数解析式为_______.



【答案】$y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

【解析】

由题意可知，$A=1,T=\dfrac{\frac{11\pi}{12}-\frac{\pi}{6}}{\frac{3}{4}}=\pi$，所以 $\omega=2$，

当 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时取得最大值 1，所以 $sin(2\times\dfrac{\pi}{6}+\varphi)=1$，

结合 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，解得 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，所以函数 $f(x)$ 的解析式是 $f(x)=sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$.

9.点 (x_0,y_0) 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离公式为 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$,通过类比的方法，可求得：在空间中，点 $(1,1,2)$ 到平面 $x+y+2z+3=0$ 的距离为______.

10．若圆 $O{:}x^2+y^2=1$ 与圆 $C{:}x^2+y^2+6x+8y+m=0$ 相切，则实数 $m=$______.

【答案】-11或 9.

【解析】

圆 C：$x^2+y^2+6x+8y+m=0$可化为$(x+3)^2+(y+4)^2=25-m$,

因为$O:x^2+y^2=1$与圆 C 相切，

所以$|OC|=1+\sqrt{25-m}=5$或$|OC|=\sqrt{25-m}-1=5$,

所以$m=9$或$m=-11$，故答案是-11或9

11.已知函数$f(x)=1+4cosx-4sin^2x,x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}]$，则$f(x)$的值域为______.

【答案】$[-4,5]$.

【解析】

$f(x)=1+4cosx-4sin^2x=1+4cosx-4(1-cos^2x)$

$=4cos^2x+4cosx-3=4(cosx+\frac{1}{2})^2-4$,

因为$x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}]$，所以$cosx\in[-\frac{1}{2},1]$,

所以$4(cosx+\frac{1}{2})^2-4\in[-4,5]$，故函数的值域为$[-4,5]$.

12.分别在曲线$y=2\ln x$与直线$y=2x+3$各取一点M,N,则MN的最小值为______.

13.已知圆心在 x 轴负半轴上的圆 C 与 y 轴和直线$x-\sqrt{3}y-6=0$均相切，直线$x+y-m=0$与圆 C 相交于 M,N 两点，若点$P(0,1)$满足$PM\perp PN$,则实数 m=______.

【答案】$m=\frac{-5\pm3\sqrt{2}}{2}$.

【解析】

设圆 C 的圆心是$(-a,0)(a>0)$，根据题意可知圆的半径是a,

根据题意有圆心到直线的距离等于半径，得到$\frac{|-a-6|}{\sqrt{1+3}}=a$，解得$a=6$,

所以圆 C 的方程是$(x+6)^2+y^2=36$，即$x^2+y^2+12x=0$,

与直线$x+y-m=0$联立，化简得$2x^2+(12-2m)x+m^2=0$，$\Delta>0$,

设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，所以$x_1+x_2=m-6,x_1x_2=\frac{m^2}{2}$,

因为$PM\perp PN$，所以$\vec{PM}\cdot\vec{PN}=0$，即$(x_1,y_1-1)\cdot(x_2,y_2-1)=0$,

从而有$m^2+5m-5=0$，

解得$m=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+20}}{2}=\dfrac{-5\pm 3\sqrt{2}}{2}$，经检验，两个值都可以，

故答案为$\dfrac{-5\pm 3\sqrt{2}}{2}$.

14.定义在R的连续函数$f(x)$满足：$f(x)+f(-x)=x^2$，且当$x>0$时，$f'(x)<x$.设函数$g(x)=2e^x+3x-a\ (a\in R)$，若存在$x_0\in\left\{x|f(x)-f(1-x)\geqslant x-\dfrac{1}{2}\right\}$，使得$g[g(x_0)]=x_0$，则实数$a$的取值范围是______.

二、解答题（本大题共6小题，共计90分．请在答题纸指定区域内作答，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

15.已知锐角α,β，且$tan\alpha=2,cos\beta=\dfrac{5}{13}$，求：

（1）$sin2\alpha$；　　（2）$tan(2\alpha-\beta)$

【答案】（1）$sin2\alpha=\dfrac{4}{5}$.（2）$tan(2\alpha-\beta)=\dfrac{56}{33}$.

【解析】

（1）$\because tan\alpha=2$

$\therefore sin2\alpha=2sin\alpha cos\alpha=\dfrac{2sin\alpha cos\alpha}{sin^2\alpha+cos^2\alpha}=\dfrac{2tan\alpha}{tan^2\alpha+1}=\dfrac{2\times 2}{2^2+1}=\dfrac{4}{5}$

（2）$\therefore tan\alpha=2$且α为锐角　$\therefore tan2\alpha=\dfrac{2tan\alpha}{1-tan^2\alpha}=\dfrac{2\times 2}{1-2^2}=-\dfrac{4}{3}$

$\because cos\beta=\dfrac{5}{13}$且$\alpha$为锐角　$\therefore sin\beta=\sqrt{1-cos^2\beta}=\sqrt{1-(\dfrac{5}{13})^2}=\dfrac{12}{13}$

$\therefore tan\beta=\dfrac{sin\beta}{cos\beta}=\dfrac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}=\dfrac{12}{5}$

$\therefore tan(2\alpha-\beta)=\dfrac{tan2\alpha-tan\beta}{1+tan2\alpha\cdot tan\beta}=\dfrac{-\frac{4}{3}-\frac{12}{5}}{1+(-\frac{4}{3})\times\frac{12}{5}}=\dfrac{56}{33}$.

16.若命题p：关于x的不等式$3^x+1<a$的解集为空集；命题 q：函数$f(x)=x^3+ax^2+x$在R 上是增函数.

（1）若命题$p\vee q$是真命题，$p\wedge q$是假命题，求实数a的取值范围。

（2）设命题 m：函数$y=x^2+bx+a$的图像与 x 轴有公共点，若$\neg p$ 是$\neg m$的必要不充分条件，求实数b的取值范围。

17.已知函数$f(x)=1+\sqrt{3}cos2x-sin^2(\frac{\pi}{4}-x)$，

（1）求$f(x)$的最小正周期和单调递减区间。

（2）若方程$f(x)-m=0$在区间$[\frac{\pi}{4},\pi]$上有两个不同的实数解，求实数 m 的取值范围。

【答案】（1）$T=\pi$；$[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi](k\in Z)$.

（2）$(-2,1]$.

【解析】

（1）$f(x)=1+\sqrt{3}cos2x-2sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$=\sqrt{3}cos2x+cos(\frac{\pi}{2}-2x)=\sqrt{3}cos2x+sin2x$

$=2sin(2x+\frac{\pi}{3})$

∴$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

由$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，解得：$\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{7\pi}{12}+k\pi,k\in Z$

∴$f(x)$的单调递减区间为：$[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi](k\in Z)$

（2）即$y=f(x)$在区间$[\frac{\pi}{4},\pi]$上的图象与直线$y=m$有两个不同的交点.

由（1）知：$f(x)$在$[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}]$上单调减，在$[\frac{7\pi}{12},\pi]$上单调增，

∴$f(x)_{min}=f(\frac{7\pi}{12})=-2$，$f(\frac{\pi}{4})=1$，$f(\pi)=\sqrt{3}$

∴当$-2<m\leq 1$时，$y=f(x)$在区间$[\frac{\pi}{4},\pi]$上的图象与直线$y=m$有两个不同的交点，即方程$f(x)-m=0$在区间$[\frac{\pi}{4},\pi]$上两个不同的实数解.

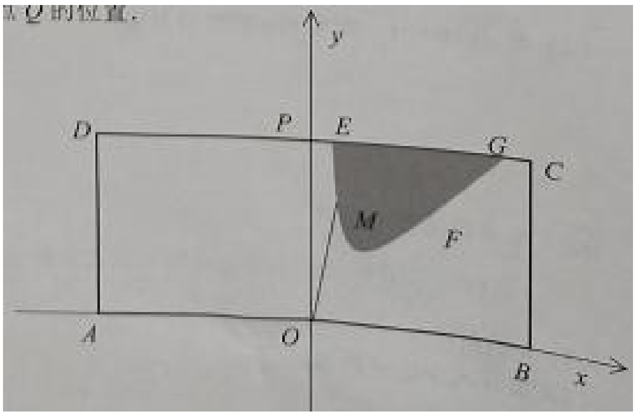
∴m的取值范围为$(-2,1]$.

18.某旅游局欲将一块长 20 百米，宽 10 百米的矩形空地 ABCD 建成三星级乡村旅游园区，园区内有一景观湖 EFG（如图中阴影部分）。以 AB 所在直线为 x 轴，AB 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系 xOy，O 为园区正门，园区北门 P 在 y 正半轴上，且 PO=10 百米。景观湖的边界线符合函数$y=x+\frac{4}{x}(x>0)$的模型。

（1）若建设一条与 AB 平行的水平通道，将园区分成面积相等的两部分，其中湖上的部分建成玻璃栈道，求玻璃栈道的长度。

（2）若在景观湖边界线上一点 M 修建游船码头，使得码头 M 到正门 O 的距离最短，求此时 M 点的横坐标。

（3）设图中点 B 为仓库所在地，现欲在线段 OB 上确定一点 Q 建货物转运站，将货物从点 B 经 Q 点直线转运至北门 P(线路 PQ 不穿过景观湖)，使货物转运距离 PQ+QB 最短，试确定点 Q 的位置。

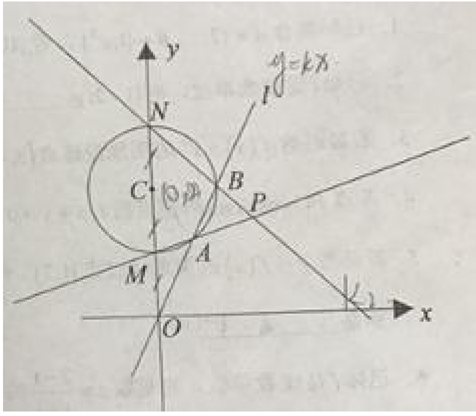


19.如图在平面直角坐标系xOy中，圆C的方程为$x^2+(y-2)^2=1$，且圆C与y轴交于M,N两点（点N在点M的上方），直线$l:y=kx(k>0)$与圆C交于A，B两点。

（1）若$AB=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，求实数k的值。

（2）设直线AM，直线BN的斜率分别为k_1,k_2，若存在常数a使得$k_1=ak_2$恒成立？若存在，求出a的值.若不存在请说明理由。

（3）若直线AM与直线BN相较于点P，求证点P在一条定直线上。



【答案】(1) $k=2$.（2）存在实数$a=-\frac{1}{3}$，使得$k_1=ak_2$恒成立；理由见解析.（3）证明见解析.

【解析】

（1）∵圆C：$x^2+(y-2)^2=1$　∴圆心$(0,2)$，半径$r=1$

∵直线$l:kx-y=0(k>0)$与圆C相交于A，B两点，且$AB=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

∴圆心到l的距离为$d=\sqrt{1-(\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{5})^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$　∴$\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，解得：$k=\pm 2$

∵$k>0$　　∴$k=2$

（2）∵圆C与y轴交于M，N两点（点N在点M上方）

∴$M(0,1),N(0,3)$　∴$AM:y=k_1x+1,BN:y=k_2x+3$，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

直线AM与圆C方程联立：$\begin{cases}y=k_1x+1\\x^2+(y-2)^2=1\end{cases}$，化简得：$(k_1^2+1)x^2-2k_1x=0$

∴$A(\frac{2k_1}{k_1^2+1},\frac{3k_1^2+1}{k_1^2+1})$，同理可求：$B(-\frac{2k_2}{k_2^2+1},\frac{k_2^2+3}{k_2^2+1})$

$\because O,A,B$三点共线，且 $\vec{OA}=(\frac{2k_1}{k_1^2+1},\frac{3k_1^2+1}{k_1^2+1})$，$\vec{OB}=(-\frac{2k_2}{k_2^2+1},\frac{k_2^2+3}{k_2^2+1})$

$\therefore \frac{2k_1}{k_1^2+1}\cdot\frac{k_2^2+3}{k_2^2+1}-(-\frac{2k_2}{k_2^2+1})\cdot\frac{3k_1^2+1}{k_1^2+1}=0$，化简得：$(3k_1+k_2)(k_1k_2+1)=0$

$\because k_1k_2+1\neq 0$ $\therefore 3k_1+k_2=0$，即 $k_1=-\frac{1}{3}k_2$

$\therefore$存在实数 $a=-\frac{1}{3}$，使得$k_1=ak_2$恒成立.

（3）设$P(x_0,y_0)$ $\therefore \begin{cases}y_0=k_1x_0+1\\ y_0=k_2x_0+3\end{cases}$ 且 $k_1\neq k_2$ $\therefore \begin{cases}x_0=\frac{2}{k_1-k_2}\\ y_0=\frac{3k_1-k_2}{k_1-k_2}\end{cases}$

由（2）知：$k_2=-3k_1$，代入得：$y_0=\frac{3k_1-(-3k_1)}{k_1-(-3k_1)}=\frac{3}{2}$为定值

$\therefore$点P在定直线$y=\frac{3}{2}$上.

20.已知$f(x)=x(\ln x-ax)$.

(1)若 $a=0$，求函数$f(x)$的单调区间和最小值.

(2)若$f(x)$有两个极值点，求实数a的取值范围。

(3)若$x_1,x_2\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，且 $x_1+x_2<1$，比较x_1x_2 与$(x_1+x_2)^4$的大小，并说明理由。