2021年普通高等学校招生全国统一考试·新高考模拟卷(三)

一、选择题:

1. 已知集合 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant 4\}$,$B=\{y|y=e^x\}$,则集合 $A\cap B=$(　　)

A. $[-3,4]$　　B. $(4,+\infty)$　　C. $(0,4]$　　D. $[-3,+\infty)$

2. 若复数 z 满足 $z\cdot(1+i^3)=(1+i)^2$(i 为虚数单位),则 $|z|=$(　　)

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{3}$

3. 已知 α 表示平面,m、n、l 表示不同的直线,则 $m\parallel n$ 的一个充分不必要条件是(　　)

A. $m\parallel\alpha,n\subset\alpha$　　B. $m\perp l,n\perp l$　　C. $m\perp\alpha,n\perp\alpha$　　D. $m\parallel\alpha,n\parallel\alpha$

4. 已知曲线 $y=f(x-2)$ 关于直线 $x=2$ 对称且函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数,若 $f(2)=0$,则不等式 $\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}>0$ 的解集为(　　)

A. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　　B. $(0,2)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(0,2)$

5. 鲁班锁(也称孔明锁、难人木、六子联方)起源于古代中国建筑的榫卯结构.这种三维的拼插器具内部的凹凸部分(即榫卯结构)啮合,十分巧妙.鲁班锁类玩具比较多,形状和内部的构造各不相同,一般都是易拆难装.如图 1,这是一种常见的鲁班锁玩具,图 2 是该鲁班锁玩具的直观图,每条棱的长均为 2,则该鲁班锁的体积为(　　)

A. $56+\dfrac{112\sqrt{2}}{3}$　　B. $56+32\sqrt{2}$

C. $48+\dfrac{112\sqrt{2}}{3}$　　D. $48+32\sqrt{2}$

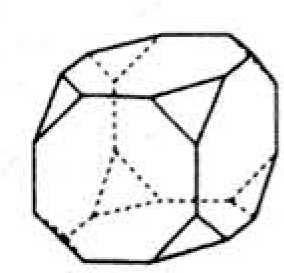


图2

6. 已知 $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$,$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{5}$,则 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=$(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$　　C. $\dfrac{4\sqrt{6}}{25}$　　D. $-\dfrac{4\sqrt{6}}{25}$

7. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$ 最大值为(　　)

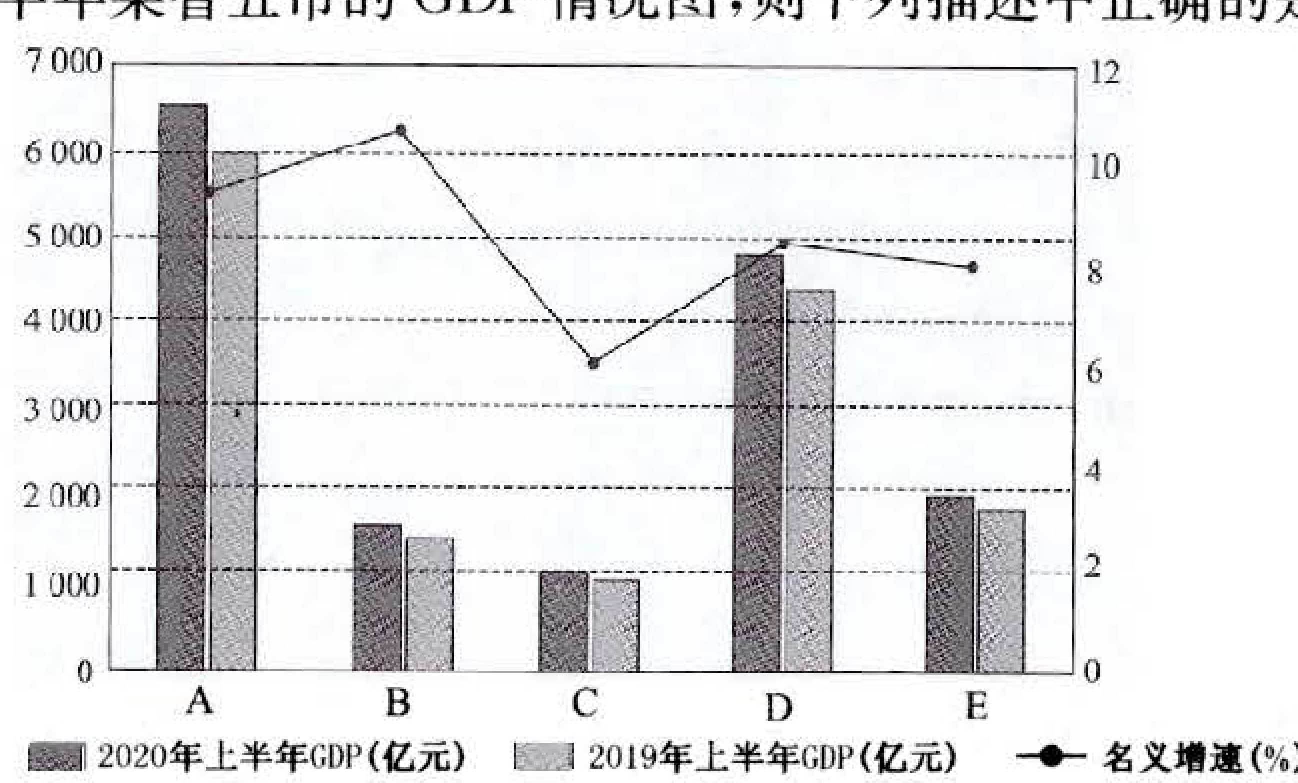
A. $\sqrt{2}+1$　　B. $\sqrt{2}-1$　　C. $-\sqrt{2}+1$　　D. $-\sqrt{2}-1$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{x^2+3x+1}-a,x\leqslant 0,\\ x+\dfrac{4}{x}-3-a,x>0\end{cases}$ 的四个零点分别是 $x_1<x_2<x_3<x_4$,则 $x_3+x_4-x_1x_2$ 的最大值为(　　)

A. 3　　B. e　　C. e+2　　D. e+3

二、选择题:

9. 如图是 2020 年上半年某省五市的 GDP 情况图,则下列描述中正确的是(　　)



A. 2020 年上半年 GDP 总量和名义增速由高到低排位均居同一位的市只有 1 个

B. B 市 2019 年上半年的 GDP 总量比 C 市 2020 年上半年的 GDP 总量高

C. 与去年同期相比 2020 年上半年五个市的 GDP 总量均实现了增长

D. 2020 年上半年 GDP 名义增速由高到低排位第 5 的是 E 市

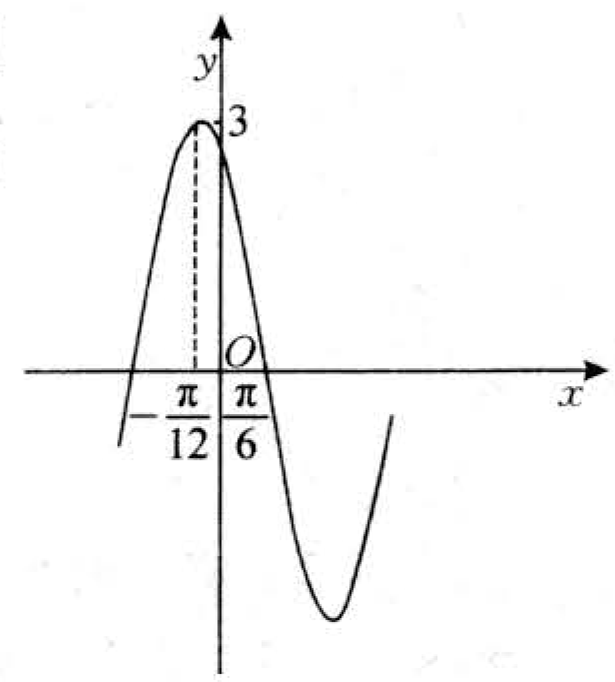
10. 已知数列是$\{a_n\}$正项等比数列，且$\frac{2}{a_3}+\frac{3}{a_7}=\sqrt{6}$，则 a_5 的值可能是（　　）

A. 2　　B. 4　　C. $\frac{8}{5}$　　D. $\frac{8}{3}$

11. 我国古代数学家秦九韶在《数书九章》中记述了“三斜求积术”，用现代式子表示即为：在△ABC中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，则△ABC 的面积 $S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[(ab)^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}$. 根据此公式，若 $a\cos C+c\cos A+3b\cos B=0$，且 $b^2-c^2-a^2=2$，则（　　）

A. $\sin B=\frac{1}{3}$　　B. $ac=3$　　C. △ABC 为锐角三角形　　D. △ABC 的面积为$\sqrt{2}$

12. 已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$的图象如图所示，将 $f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到函数 $g(x)$的图象，则（　　）



A. $g(x)$的最小正周期为 π

B. $g(x)$的一个单调递增区间为$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$

C. $g(x)$为奇函数　　D. $g(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上只有一个零点

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知抛物线 C：$y^2=x$ 上点 $A(3,y_0)$，F 为 C 的焦点，则$|AF|=$________.

14 某小组有男生 3 名，女生 2 名，任选 2 名同学参加志愿者活动，则选出的 2 名同学中都是男生的概率为________.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+x+a),x\geqslant 0\\ 2-x^2,x<0\end{cases}$的值域为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围为________.

16. 已知点 F_1,F_2 分别为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，以 F_1F_2 为直径作圆与双曲线的右支交于点 P，若$|PF_1|=\frac{1}{2}(|PF_2|+|F_1F_2|)$，则双曲线的离心率为________.

四、解答题：

17. 在条件①$b\tan A=(2c-b)\tan B$，②$\cos 2A+2\cos^2\frac{A}{2}=1$，③$\sqrt{3}\sin B\left(\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}\right)=2\sin C$，且 A 为锐角，中任选一个，补充到下面问题中，并给出问题解答.

在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，________，$b+c=6$，$a=2\sqrt{6}$. 求△ABC 的面积.

解：选条件①：由于△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $b\tan A=(2c-b)\tan B$.

所以 $\sin B\cdot\frac{\sin A}{\cos A}=(2\sin C-\sin B)\cdot\frac{\sin B}{\cos B}$，

由于 $\sin B\neq 0$，所以 $\sin A\cos B=2\sin C\cos A-\sin B\cos A$，

则 $\sin(A+B)=2\sin C\cos A$，即 $\sin C=2\sin C\cos A$，由于 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，

由于 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………… 5 分

又 $a^2=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$，$a=2\sqrt{6}$，$b+c=6$，所以 $bc=4$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 4\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. ………………………………… 10 分

选条件②：由 $\cos 2A+2\cos^2\dfrac{A}{2}=1$ 得 $2\cos^2 A+\cos A-1=0$，即 $(\cos A+1)(2\cos A-1)=0$，则 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，

$A\in(0,\pi)$，解得 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ………………………………………………………………… 5 分

又 $a^2=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$，

$a=2\sqrt{6}$，$b+c=6$，所以 $bc=4$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 4\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. ……………………………………………… 10 分

选条件③：由 $\sqrt{3}\sin B\left(\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}\right)=2\sin C$ 得 $\sqrt{3}\sin B\left(\dfrac{\cos A}{\sin A}+\dfrac{\cos B}{\sin B}\right)=2\sin C$，

所以 $\sqrt{3}\sin B\left(\dfrac{\sin B\cos A+\cos B\sin A}{\sin A\sin B}\right)=2\sin C$，即 $\sqrt{3}\sin B\cdot\dfrac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=2\sin C$，所以 $\dfrac{\sqrt{3}\sin C}{\sin A}=2\sin C$，又 $\sin C\neq 0$

所以 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为 A 为锐角，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ………………………………………………………………… 5 分

又 $a^2=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$，

$a=2\sqrt{6}$，$b+c=6$，所以 $bc=4$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 4\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. ……………………………………………… 10 分

18. 已知公差 $d\neq 0$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_2=5$，a_1,a_4,a_{13} 成等比数列.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求证数列 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n<\dfrac{3}{4}$.

解：(1)∵a_1,a_4,a_{13} 成等比数列，∴$a_4^2=a_1a_{13}$ ………………………………………………… 1 分

则有 $\begin{cases}a_2=5,\\ a_4^2=a_1\cdot a_{13},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+d=5,\\ (a_1+3d)^2=a_1(a_1+12d),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=3,\\ d=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=5,\\ d=0\end{cases}$（舍去） ……………… 3 分

∴$a_n=3+(n-1)\times 2=2n+1$； ………………………………………………………………… 4 分

(2) 由(1)$a_n=2n+1$，则有 $S_n=\dfrac{n}{2}(3+2n+1)=n^2+2n$. ……………………………………… 6 分

则 $\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$. ………………………………………………………… 8 分

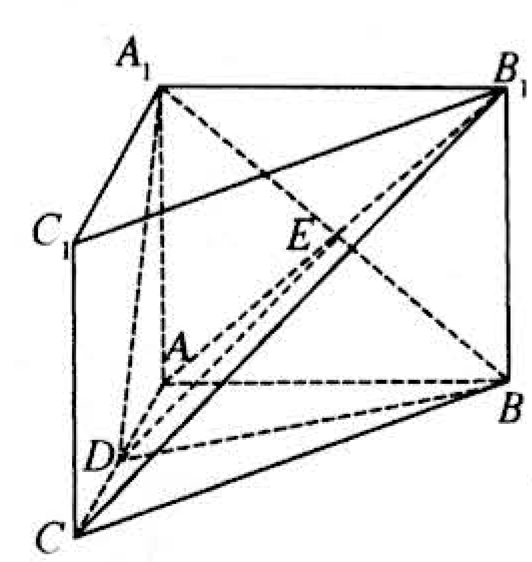
$T_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)<\dfrac{3}{4}$. ……………………………………………………… 12 分

19. 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp AB$，$AC=AB=AA_1$，D 为 AC 中点.

(1)证明：B_1C∥平面 BA_1D；

(2)求异面直线 A_1D 与 B_1C 所成角的余弦值.



解：(1)证明：连接 AB_1 交 A_1B 于点 E，连接 DE

则 $AE=EB_1$，又因为点 D 为 AC 中点，

∴在 $\triangle AB_1C$ 中，B_1C∥DE， ……………………………… 2 分

∵$DE\subset$ 平面 BA_1D，$B_1C\not\subset$ 平面 BA_1D，

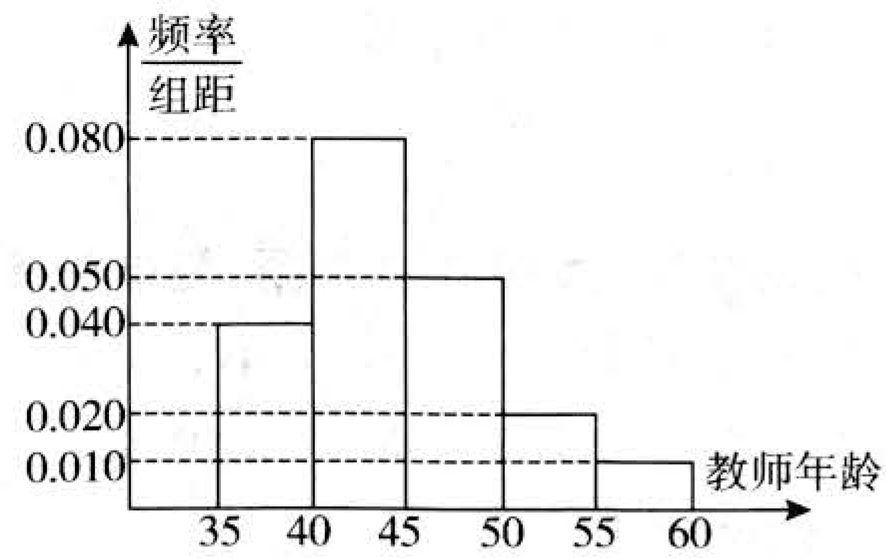
∴B_1C∥平面 BA_1D. ………………………………………… 6 分

(2)由(1)知 B_1C∥DE，∴$\angle A_1DE$ 为异面直线 A_1D 与 B_1C 所成角. ……………………………… 8 分

设 $AB=2$，则 $A_1D=\sqrt{5}$，$A_1E=\sqrt{2}$，$DE=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$，∴$\triangle A_1DE$ 为直角三角形，$\cos\angle A_1DE=\dfrac{DE}{A_1D}=$

$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，即异面直线 A_1D 与 B_1C 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ……………………………………… 12 分

20. 某市为了了解本市教师队伍的年龄分布情况，将该市年龄不小于 35 岁且不大于 60 岁的教师按年龄分组，分组区间为 [35,40)，[40,45)，[45,50)，[50,55)，[55,60]，其中年龄在[35,45)的教师称为青年教师，年龄在[45,60]的教师称为中老年教师. 已知分别位于市区和农村的甲、乙两所学校的统计结果如下列图表所示，其中市区学校甲青年教师的人数为 48 人.



市区学校甲教师年龄分布

农村学校乙教师年龄分布

年龄	[35,40)	[40,45)	[45,50)	[50,55)	[55,60]
人数	18	22	18	18	4

(1)求市区学校甲教师年龄在[35,60]的人数；

(2)在市区学校甲和农村学校乙中分别任意抽取 1 人，求两人中至少有一人为青年教师的概率；

(3)填写下列 2×2 列联表，并根据列联表判断是否有 99%的把握认为学校位置和教师年龄层次有关.

	市区学校甲	农村学校乙	合计
青年教师人数			
中老年教师人数			
合计			

参考数据：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.1	0.05	0.01	0.005
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

解：(1)设市区学校甲教师年龄在[35,60]的人数为 n，

则有 $\dfrac{48}{n}=(0.04+0.08)\times5$，解得 $n=80$. …………………………………………………… 4 分

(2)在市区学校甲中任意抽取 1 人，此人为青年教师的概率为 $\dfrac{48}{80}=\dfrac{3}{5}$，

在农村学校乙中任意抽取 1 人，此人为青年教师的概率为 $\dfrac{18+22}{18+22+18+18+4}=\dfrac{1}{2}$，

所以两人中至少有一人为青年教师的概率为 $1-\left(1-\dfrac{3}{5}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4}{5}$. …………………………… 8 分

(3)根据题意得 2×2 列联表如下：

	市区学校甲	农村学校乙	合计
青年教师人数	48	40	88
中老年教师人数	32	40	72
合计	80	80	160

则 $K^2=\dfrac{160\times(40\times32-48\times40)^2}{80\times80\times88\times72}\approx1.62<6.635$，

所以没有 99%的把握认为学校位置和教师年龄层次有关. ……………………………………… 12 分

21. 已知点 M 为椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的一个动点，且点 M 到椭圆两焦点的距离之和为 4，离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1)求椭圆 E 的标准方程；

(2)过点 $P(0,3)$ 的直线 l 与椭圆 E 交于 A,B 两点，若点 A 是 PB 的中点，求点 A 的坐标.

解：(1) 由题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ 2a=4,\end{cases}$ 结合 $a^2=b^2+c^2$ 解得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=3,\end{cases}$

所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………………… 4 分

(2) $P(0,3)$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由题知：$2x_1=0+x_2,2y_1=3+y_2$

椭圆的上下顶点坐标分别是 $(0,\sqrt{3})$ 和 $(0,-\sqrt{3})$，……………………………………………………… 5 分

经检验直线 l 不经过这两点，即直线 l 的斜率 k 存在，则不妨设直线 l 的方程为 $y=kx+3$. ………… 6 分

联立椭圆和直线方程，消去 y 整理得

$(3+4k^2)x^2+24kx+24=0\Rightarrow x_1+x_2=\frac{-24k}{3+4k^2},x_1\cdot x_2=\frac{24}{3+4k^2}$，

$\Delta=(24k)^2-96(3+4k^2)>0$，得 $k^2>\frac{3}{2}$.

$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{1}{2}+2\Rightarrow\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{(-24k)^2}{(3+4k^2)\cdot 24}=\frac{9}{2}\Rightarrow k=\pm\frac{3}{2}$，……………………… 10 分

则直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{3}{2}x+3$，与椭圆方程联立得点 A 的坐标为 $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ 或 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

…… 12 分

22. 已知函数 $f(x)=x^2\ln x+\ln x-2x+6$.

(1)求曲线 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)若对 $\forall x_1\in[1,+\infty)$，$\exists x_2\in(0,+\infty)$，使得不等式 $f(x_1)\geqslant x_2+\frac{m}{x_2}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

解：(1) $f'(x)=2x\ln x+x+\frac{1}{x}-2$，

$\therefore f(1)=4,f'(1)=0$，

$\therefore$ 曲线 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=4$. ……………………………………………………… 4 分

(2)对 $\forall x_1\in[1,+\infty)$，$\exists x_2\in(0,+\infty)$，使得不等式 $f(x_1)\geqslant x_2+\frac{m}{x_2}$ 恒成立等价于 $\exists x_2\in(0,+\infty)$，使得 $f(x)_{\min}\geqslant x_2+\frac{m}{x_2}(x\geqslant1)$ 成立，……………………………………………………………………… 7 分

$f'(x)=2x\ln x+x+\frac{1}{x}-2$.

因为 $x\geqslant1$，所以 $2x\ln x\geqslant0,x+\frac{1}{x}\geqslant2$，

所以 $f'(x)=2x\ln x+x+\frac{1}{x}-2\geqslant0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，……………………………………… 10 分

所以函数 $f(x)=x^2\ln x+\ln x-2x+6$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

则 $f(x)_{\min}=f(1)=4$，…………………………………………………………………………………… 13 分

则问题转化为 $\exists x_2\in(0,+\infty)$，使得不等式 $4\geqslant x_2+\frac{m}{x_2}$ 成立，

等价于不等式 $x^2-4x+m\leqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，

所以 $m\leqslant[-(x^2-4x)]_{\max}=4$. …………………………………………………………………… 12 分