



抓纲务本 落实四基

激活思维 关注素养

——最后60天的复习建议

扬州大学附属中学 何继刚

2019.4.12

一、全国卷的回顾与反思

1 高中核心素养的特点

数学核心素养的综合性体现在数学核心素养是数学思维能力，数学态度和数学能力的综合体现，综合能力不仅体现在遇到数学问题怎么样去解，也体现在如何去思考一个数学问题，一道题目的解答方法和思维方式可以体现一个人的数学核心素养，一般来说，几何直观题比较注重考查学生的直观想象能力。应用型问题一般会侧重考查学生的数学建模能力和逻辑推理能力，计算题，图表题会考查数学运算能力和数据分析能力。有些不能直观表达的题目就是为了考查学生的数学抽象思维。数学核心素养的综合性是显而易见的。

一、全国卷的回顾与反思

1 高中核心素养的特点

数学核心素养的阶段性主要表现在核心素养的层次水平不同，不同年龄阶段的学生对于同一问题的认识不同，解决问题的角度和方法也不相同，随着年龄的增长，学生对于问题的认识和思维的复杂程度也在发生着变化。不同阶段，表现方式不同。表现的程度也不同。

持久性主要表现在数学核心素养不是短暂出现的，不管是小学，中学还是大学，这些思维方式，解决问题的方法都是数学核心素养的体现，甚至于日常生活中的应用。运用数学思维去解决数学问题和生活中的问题是数学核心素养的形成。

一、全国卷的回顾与反思

2 数学核心素养在高考中的体现

2.1 数学高考试卷结构的分析。

（以全国卷 I 为例）

（1）理科难度略降，但运算量较大，对考生能力要求仍较高，不易拿高分。落点准确，考查全面
2017年试卷落点准确，稳定考查高中数学主干知识，全面覆盖基础知识，注意传统问题和注重通性通法，无偏题怪题。以考查基础为主，试题还体现了对中国数学传统文化的关注，如理科第2题（中国古代的太极图。）

一、全国卷的回顾与反思

(2) 根植教材，注重基础全卷基础题立足教材，把基础知识、基本技能、基本思想方法作为考查的首要内容，如理科选择题的第1、2、3、4、6、9题，填空题的第13、14题，解答题的第18题，尽可能让每一位考生都得到基本分，在第21题解决过程中，导数作为函数研究的工具性作用也体现得淋漓尽致；以及文科选择题第1、2、4、5、7、8、9题，填空题第13、14、15题，都是侧重基础能力的考查。

一、全国卷的回顾与反思

(3) 强化概念，适度创新试卷考查了三角函数、数列、立体几何、解析几何、函数与导数等高中数学基础知识，准确把握了高中数学的重点。要求理解基本概念、掌握基本运算. 如文理科第13题考查向量的基本运算。试题也要求能看清问题的本质，进行合理的转化。如理科第7题和第15题，是从图形中寻找问题的本质，不同要求的问题合理搭配。

一、全国卷的回顾与反思

(4) 关注重点，凸显能力试卷着重考查了高中数学教学的主干知识，强调能力立意.选择题和填空题以考查基础知识为主，解答题考查运算求解和推理论证能力.如文理科第19题要求学生有较好的阅读理解能力和计算能力，理科第20题数形结合和计算能力，理科第21题考查学生分类讨论能力和化简计算能力.

2018全国卷引发的反思

2018 年普通高等学校招生全国统一考试(2) 理科数学分析

题型	题号	知识点(理)	知识点(文)	题型	题号	知识点(理)	知识点(文)
选择	1	复数除法运算 (常规)	复数乘法运算 (常规)	选择	7	算法流程图 (常规)	同理 6
选择	2	点集元素个数 (新颖)	数集求交(常规)	选择	8	数学文化、计数 原理、古典概型 (新颖)	同理 7
选择	3	函数图象性质 (常规)	同	选择	9	长方体中异面直 线所成角的余弦 (常规)	正方体中异面 直线所成角的 正切(常规)
选择	4	向量的数量积 (常规)	同	选择	10	三角函数单调性 单调区间(含参 数问题) (新颖)	类似理 10, 区 间略不同
选择	5	双曲线渐近线 (常规)	古典概型(常 规)	选择	11	理科抽象函数综 合(常规)	椭圆离心率
选择	6	解三解形余弦 定理(常规)	同理 5	选择	12	椭圆离心率(常 规难于文科 11)	同理 11

2018 年普通高等学校招生全国统一考试(2)

理科数学分析

题型	题号	知识点(理)	知识点(文)	题型	题号	知识点(理)	知识点(文)
填空	13	导数的几何意义 (常规)	导数的几何意义 (给的函数不同)(常规)	解答	19	抛物线中的综合问题 (常规)数学抽象、逻辑推理、数学运算	立体几何(常规)直观想象
填空	14	线性规划 (常规)	同	解答	20	空间向量(常规)与二面角有关的问题。直观想象、数学运算、数学建模、逻辑推理	同理 19
填空	15	三角恒等变换 (常规)	三角恒等变换比理科简单一点 (常规)	解答	21	导数(常规),基于指数函数。逻辑推理、数学运算、直观想象	导数(常规)基于三次函数
填空	16	圆锥侧面积(新颖)直观想象	圆锥体积(新颖)	选做	22	坐标系与参数方程(常规)	同
解答	17	等差数列(常规)	同	选做	23	不等式选讲(常规)	同
解答	18	线性回归(新颖)数学抽象、数学建模、数据处理、数学运算、直观想象逻辑推理	、同				

二、2019年全国卷高考命题的要求和思路

高考命题改革趋势

高考命题改革的总体框架是：依据高校人才选拔要求和国家课程标准，科学设计命题内容，增强基础性、综合性，着重考查学生独立思考和运用所学知识分析问题、解决问题的能力。

为什么考

立德树人 服务选拔 导向教学

考什么

应用性

解决实际问题、学以致用、
理论联系实际、实践能力

怎么考

基础性

基础知识、基本能力、人格素养

核心价值

社会主义核心价值观 社会责任感

学科素养

知识、技能、 学科观念 学科视野，

关键能力

独立思考、分析问题解决问题、

交流与合作

必备知识

基础、通用知识 基本素养、终身知识

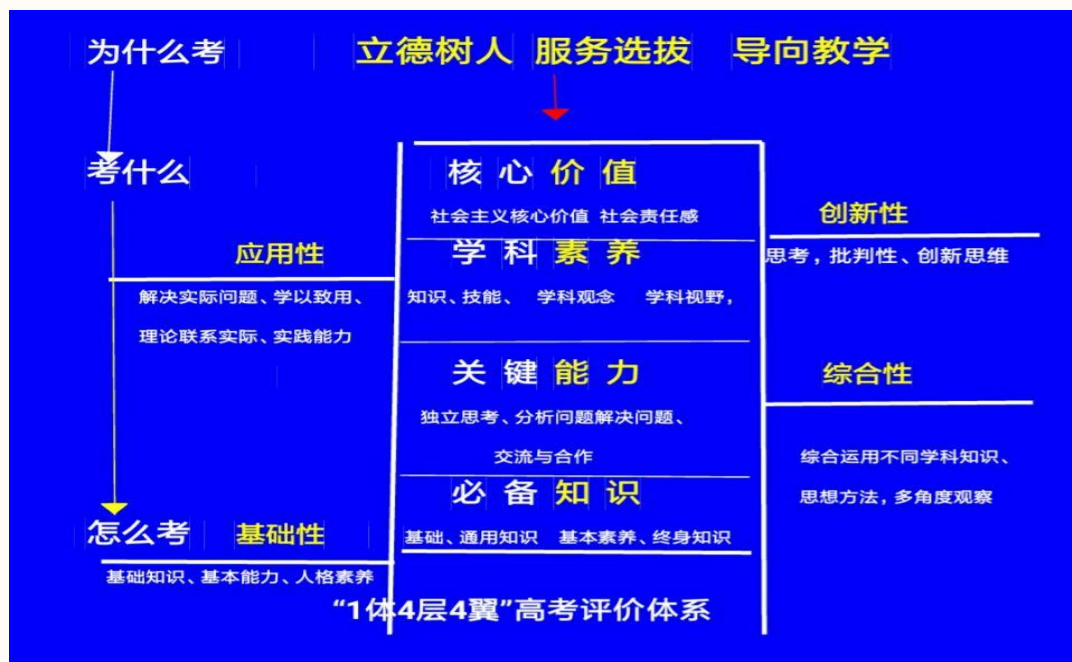
创新性

思考，批判性、创新思维

综合性

综合运用不同学科知识、
思想方法，多角度观察

“1体4层4翼”高考评价体系



“1体” “4层” “4翼”是一个完整的高考评价体系,是高考命题工作的原则，顶层设计，突出方向性。坚持科学性。反映时代性。体现民族性。凸显现实性。明确的回答了高考“为什么考”，“考什么”和“怎么考”的问题。

新高考命题要求和思路

- 学科考试命题的基本思路：
- **【命题思路一】** 依据考核目标，结合学科特点和核心素养的要求进行命题。
- **【命题思路二】** 试题要立德树人，充分发挥考试的选拔功能、激励功能、教育功能和积极导向功能。
- **【命题思路三】** 以“能力立意”（4层中的“关键能力”概念）编制试题命题原则，考查考生运用所学知识分析问题、解决问题的能力（4翼的“应用性”）。

新高考命题要求和思路

- **【命题思路四】**
- 考查考生学科知识网络的构建情况（知识点、知识与知识的内在联系），以及运用知识网络解决实际问题的能力（4翼的“应用性”）
- **【命题思路五】**
- 设计试卷、试题要考查考生的特长（自我发展、能力倾向），尽量给考生更多的自由选择的空间，展示个性，增加主观性的试题。
- **【命题思路六】**
- 设计试题要突出学科的特点，考查考生社会实践能力和运用能力,引导学生走出课堂，走向社会（四翼的“应用性”要求）。
- **【命题思路七】**
- 追求适当难度，有较高的信度和良好的区分度（服务选拔）

三、何为数学素养？

四基

基础知识、基本技能、基本思想、基本经验积累

四能

发现问题、提出问题、分析问题、解决问题的能力

三会

会用数学的眼光观察世界；

会用数学的思维分析世界；

会用数学的语言表达世界。

四、全国卷给我们复习的启示

1、回归课本程度更大；

2、紧扣四基、四能、三会

基础知识、基本技能、基本思想、基本经验积累
发现问题、提出问题、分析问题、解决问题的能力

会用数学的眼光观察世界；

会用数学的思维分析世界；

会用数学的语言表达世界。

3、数列前移，难度下降，注意复习策略。

五、几点复习建议

在最后60天中我们做到一个前置、两个加强，三个突出，四个克服、五个布局、六点提醒、七个关注、十个激活。

一个前置：考前指导前置（加强审题的教学、答题策略应用的实践）。

两个加强：

（1）加强填空题速度和正确率的强化训练。以“小、巧、活、宽”（题型小、方法巧、运用活、覆盖宽）的题为载体。

（2）加强知识点交汇处题目的训练。

三个突出：

- (1) 突出基础知识的灵活运用。
- (2) 突出“三多”训练。“一题多问，层层递进”是高考命题的一大特点。复习中要多做多问题训练，多做“由大到小”的分解训练，多做结论发散的训练。
- (3) 突出学生阅读分析能力训练。

四个克服：

- (1) 克服难题过多，起点过高。
- (2) 克服会做做错现象。
- (3) 克服解题不规范现象。
- (4) 克服高原现象。

五个布局：

- (1) 时间布局。
- (2) 保温布局。（保温练习）
- (3) 题型覆盖布局。
- (4) 考试布局。（卷面结构、热点问题、易错点）
- (5) 教学内容布局。

三轮复习（4月12日到5月30日）

- 主要以专题、模拟训练为主，在二轮的基础上进一步贴近高考。
- 1、套题结合类题
- 2、调控试题难度
- 3、主干知识再梳理
- 4、针对性考试

自主复习（5月30日到6月3日）

- 指导下的自主复习
- 1、集体智慧：老师们多方搜集信息，精准模拟；
- 2、统一思想：不做难、偏、怪题，稳定情绪，增强信心，准备应考，避免造成学生恐慌。
- 3、资源共享：每位老师的每个行动高度统一。
- 4、考前再回首。根据前三轮复习学生集中暴露的问题组织好答疑。

考前最后一课（6月4日）

六点提醒：

1.依纲据本，把控深度和难度。处理好《考试说明》和教材的关系是最后阶段课堂有效复习的支撑点。认真学习和研究《课程标准》、《教学要求》和《考试说明》，弄清各个知识点考查的尺度，少做或不做无用功，切实提高课堂教与学的效率。合理研判A、B、C三级考点是关键，A级考点，无需拓展和拔高。

2.狠抓四基，注重通性和通法。讲清、讲透概念和例题是三轮课堂有效复习的立足点。

(1)讲清概念和例题,夯实基础知识。

复习中不搞“偏题”和“怪题”，切实领会教材中的基本解题思想和方法；

(2)讲透概念和例题,强化思维训练。在三轮课堂复习中讲透概念和例题,包括把握好概念和例题的本意,还要挖掘概念和例题的内涵和外延,发挥好和发挥足概念和例题的作用。

3.培养能力，渗透数学思想方法。抓实、抓好专题复习，领悟数学思想是三轮课堂有效复习的稳固点。

(1) .抓实数学知识专题的复习。知识专题是数学的基础,尤其注意知识的交叉点和结合点,进行必要的针对性专题复习.在复习中,以重点知识的综合性题目为载体,渗透对数学思想和方法的系统介绍。通过对例习题的精选、精讲、精练,力求归纳出知识模块形成体系,同时也要更深层次能提炼出数学思想。在教师的指导下,学生对知识的再现、整合过程中,可以伴随一系列思维活动,也是提高逻辑思维的过程。

(2) 抓好数学思想方法专题复习。方法专题是指对高中数学中涉及的重要思想方法,主要有函数与方程的思想方法、数形结合的思想方法、分类讨论的思想方法、化归与转化的思想方法等。数学思想是数学的精髓,学生对解题规律的探究、发现、归纳和应用过程中掌握数学基本方法,逐步悟出数学思想的精髓,才能把数学知识与技能转化为分析问题解决问题的能力,使学生的能力和数学素养更上一个层次,让学的成绩和综合能力螺旋式上升。

4. 诊断反思，用好考试和练习资源。讲究评讲试卷的方法和技巧是三轮课堂有效复习的增长点。

试卷讲评效果,我认为要做好以下几点:

(1)主次分明,评重讲难。教师在备课时应明确评讲的重难点,认真细致地进行统计,对错误原因准确地分析,对评讲思路精心设计,把学生考试中错误较集中的题目和实际教学“盲区”作为重点,把有助于提高学生综合能力的题目作为难点。

(2)贵在方法,重在思维。方法是关键,思维是核心,渗透科学方法,培养思维能力是贯穿数学教学全过程的首要任务.训练“多题一解”和“一题多解”,不在于方法的罗列,而在于思路的分析和解法的对比,从而揭示最简或最佳的解法。

(3)分类化归,集中讲评。让学生通过评讲,学会联系、归纳、整理、总结,提高自己的解题能力和综合数学素养。因此,上好试卷评讲课是三轮课堂有效复习的增长点,也是以后在考试中得高分的有力增长点。

5、变式教学，提高课堂教学效益。变式教学是三轮课堂有效复习的提升点。

(1)变式教学可以提升学生的思维。在数学教学中,由一个基本问题出发,运用类比、联想、特殊化和一般化的思维方法,探索问题的发展变化,就能使我们发现问题的本质，并能深入挖掘其潜在的数学思想方法,揭示其丰富的内涵.

(2)变式教学可以让学生全员参与。

6. 专题训练，关注高中与大学衔接内容。

加强专题复习，是三轮课堂有效复习的关注点。要重视附加题，但不要盲目地增加附加题的训练难度。应用题每年均考查，可认真研究到底考查哪些数学模型，还有哪些模型没有考查等等，可考虑进行专题复习和训练。

七个关注点：

关注着力点——四基四能。

关注突破点——思维方法。

关注升华点——联系综合。

关注创新点——数学素养。

关注得分点——运算主线。

关注失分点——解题表达（逻辑段）。

十个激活思维的策略：

策略一

回归课标与课本，

激活数学思维的源头

活动一 分段函数的性质与运用

1、已知函数 $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x - 7, & x < 0, \\ \sqrt{x}, & x \geq 0, \end{cases}$ 若 $f(a) < 1$, 则实数 a 的取值范围为_____.

2、已知函数 $f(x) = \begin{cases} (a-2)x+3, & x \leq 2, \\ \frac{a}{x}, & x > 2 \end{cases}$ 在其定义域上是单调递减函数, 则实数 a 的取值范围为_____.

变式训练 1、已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 - |x+1|, & x \leq 1, \\ (x-1)^2, & x > 1, \end{cases}$ 函数 $g(x) = f(x) + f(-x)$, 则不等式 $g(x) \leq 2$ 的解集为_____.

变式训练 2、已知函数 $f(x) = \begin{cases} (a-1)x, & x \geq 2 \\ (\frac{1}{2})^x + x - 1, & x < 2, \end{cases}$ 且对任意实数 $x_1 \neq x_2$, 都有

$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 1$ 成立, 则实数 a 的取值范围为_____.

回归课本定起点研究高考定落点

8. 判断下列说法是否正确：

- (1) 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2) > f(1)$, 则函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调增函数;
- (2) 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2) > f(1)$, 则函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是单调减函数;
- (3) 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调增函数, 在区间 $[0, +\infty)$ 上也是单调增函数, 则函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调增函数;
- (4) 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调增函数, 在区间 $(0, +\infty)$ 上也是单调增函数, 则函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调增函数.

例 1 已知一个函数的解析式为 $y=x^2$, 它的值域为 $[1,4]$, 这样的函数有多少个? 试写出其中两个函数. (P₃₃ 习题 13).

解析 $f(x)$ 可以是 $y=x^2, x \in [1,2]$ 或 $y=x^2, x \in \left(-2, -\frac{3}{2}\right] \cup [1,2]$

这道题涉及函数的三要素及其相互关系, 由于解析式及值域已确定, 因此在保证值域不变的前提下, 只须改变定义域就可得到不同的函数, 为了发挥题目的功能, 可作如下变式探究.

首先把函数的值域由连续区间改为间断区间, 形成如下变题:

变式 1: 已知函数 $y=x^2$, 值域为 $\{1, 4\}$, 这样的函数有多少个?

变式 2: 已知函数 $y=x^2$, 值域为 $\{1, 4, 9\}$, 这样的函数有多少个?

变式 3: 已知函数 $y=x^2$, 值域为 $\{1, 4, 9, \dots, n^2\}$, 这样的函数有多少个?

其次是给定函数解析式和值域, 要求确定定义域中参数的取值.

变式 4: 已知函数 $y=x^2$, 定义域为 $[-1, a]$, 值域为 $[0, 4]$, 求实数 a 的取值范围.

变式 5: 已知函数 $y=x^2$, 定义域为 $[-2, a]$, 值域为 $[0, 4]$, 求实数 a 的取值范围.

其次定义域中出现了参数 a , 可引发我们形成下列讨论参数 a 的变式题:

变式 6: 已知函数 $y=x^2$, 定义域为 $[-1, a]$, 求函数的最大值和最小值.

变式 7: 已知函数 $y=x^2$, 定义域为 $[a-1, a]$, 求函数的最大值和最小值.

最后围绕函数的表示方法, 可设计成更加开放的问题:

变式 8: 请写出几个函数 $f(x)$ 的不同解析式, 使 $f(1)=1, f(2)=4$.

例5 一铁棒欲通过如图所示的直角走廊（图1），

试回答下列问题：

（1）证明铁棒长： $L(\theta) = \frac{9}{5\sin\theta} + \frac{6}{5\cos\theta}$ ；

（2）当 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，作出上述函数的图象（可用计算器或计算机）；

（3）由（2）中图象求 $L(\theta)$ 的最小值（用计算器或计算机）；

（4）解释（3）中所求得的 L 是能够通过这个直角走廊的铁棒的长度的最大值。

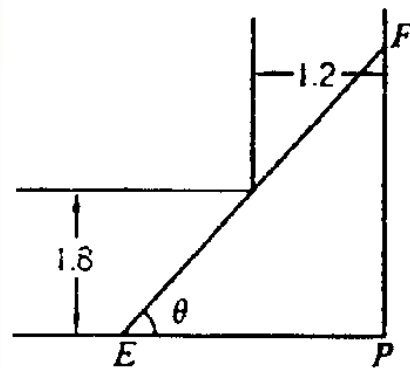


图 1

改编题1

如图2所示，一条直角走廊宽为 $a\text{ m}$ ($a > 0$)

- (1) 若位于水平地面上的一根铁棒卡在此直角走廊内，且 $\angle PEF = \theta$ ，试求铁棒的长 l ；
- (2) 若一根铁棒能水平地通过此直角走廊，求此铁棒的最大长度.

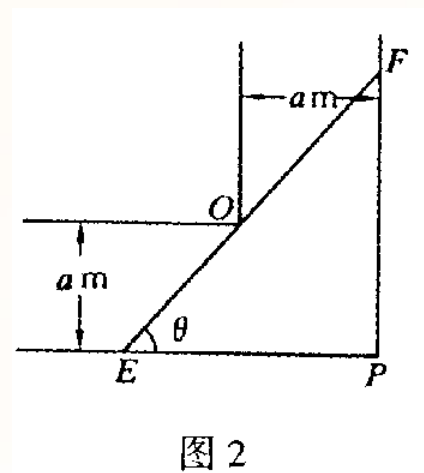


图 2

解 (1) 过点 E , F 分别作对边的垂线, 可得

$$l(\theta) = OE + OF = \frac{a}{\sin \theta} + \frac{a}{\cos \theta} = \frac{a(\sin \theta + \cos \theta)}{\sin \theta \cos \theta},$$

其中 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

设 $t = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right),$

则 $\sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2},$

其中 $t \in (1, \sqrt{2}]$, 故有 $l = \frac{2at}{t^2 - 1}, t \in (1, \sqrt{2}].$

(2) 问题即要求上述函数的最小值.

方法1 下面利用函数单调性定义证明

$l(t) = \frac{2at}{t^2 - 1}$, 在 $(1, \sqrt{2}]$ 上是单调递减函数.

设 $1 < t_1 < t_2 \leq \sqrt{2}$, 则 $t_2 - t_1 > 0, 1 < t_1 t_2 < 2$, 且有

$$l(t_1) - l(t_2) = \frac{2at_1}{t_1^2 - 1} - \frac{2at_2}{t_2^2 - 1} = \frac{2a(t_1 t_2^2 - t_1^2 t_2 + t_2)}{(t_1^2 - 1)(t_2^2 - 1)} =$$

$$\frac{2a(t_2 - t_1)(t_1 t_2 - 1)}{(t_1^2 - 1)(t_2^2 - 1)} > 0, \quad \text{即 } l(t_1) > l(t_2),$$

因此函数 $l(t) = \frac{2at}{t^2 - 1}$, 在 $(1, \sqrt{2}]$ 上是单调递减函数.

故当 $t = \sqrt{2}$ 时, 函数 $l(t) = \frac{2at}{t^2 - 1}$ 有最小值

$2\sqrt{2}a$, 即铁棒能被直角走廊卡住的最小值为 $2\sqrt{2}a$ m.

若铁棒长不大于 $2\sqrt{2}a$ m, 则铁棒能在直角走廊拐弯;

若铁棒长大于 $2\sqrt{2}a$ m, 铁棒不能在这个直角走廊拐弯.

故 l 的最小值是铁棒能在这个直角走廊拐弯的铁棒中的最长者, 即铁棒能在直角走廊拐弯的最大值为 $2\sqrt{2}a$ m.

方法2 利用复合函数的单调性.

$$l(t) = \frac{2at}{t^2 - 1} = \frac{2a}{t - \frac{1}{t}}, t \in (1, \sqrt{2}], a > 0, \text{ 当 } t \in (1, \sqrt{2}] \text{ 时,}$$

$u = t - \frac{1}{t}$ 为增函数且 $u > 0$, 故 $l(t) = \frac{2at}{t^2 - 1}$ 在 $t \in (1, \sqrt{2}]$ 上为减函数, 所以当 $t = \sqrt{2}$ 时, l 取最小值 $2\sqrt{2}a$.

以下同方法1.

方法3 利用方程有解条件来进行求解.

由 $l(t) = \frac{2at}{t^2 - 1}, t \in (1, \sqrt{2}]$, 可得 $lt^2 - 2at - l = 0$,

这一关于 t 方程必定在 $(1, \sqrt{2}]$ 内有解.

令 $f(t) = lt^2 - 2at - l$, 注意到 $f(1) = -2a < 0$,

从而必有 $f(\sqrt{2}) \geq 0$, 即 $l \geq 2\sqrt{2}a$,

且当 $t = \sqrt{2}$ 时, $l = 2\sqrt{2}a$.

故 l 的最小值是 $2\sqrt{2}a$.

方法4 利用求导数来研究函数的单调性.

由上面的解法得

$$l'(t) = \frac{-3at^2 - 2a}{(t^2 - 1)^2} < 0, \text{故 } l(t) \text{ 在 } (1, \sqrt{2}]$$

上是单调减函数, 当 $t = \sqrt{2}$ 时, $l = 2\sqrt{2}a$, 故 l 的最小值是 $2\sqrt{2}a$.

改编题2

如图3所示,一条直角走廊宽为 $a\text{ m}$, 现有一辆转动灵活的平板车,其平板面为矩形,它的宽为 $b\text{ m}$ ($0 < b < a$).

(1) 若平板车卡在直角走廊内, 且 $\angle PAB = \theta$, 试求平板车的长 l .

(2) 平板车要想顺利通过直角走廊, 其长度不能超过多少 m .

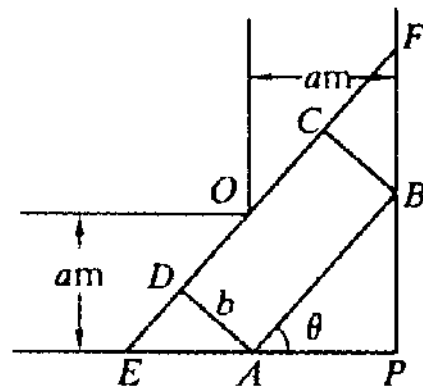


图 3

解 (1) 延长 CD 与直角走廊的边相交于点 E, F ,

如图3. 则有 $EF = OE + OF = \frac{a}{\sin \theta} + \frac{a}{\cos \theta} = \frac{a(\sin \theta + \cos \theta)}{\sin \theta \cos \theta}$,

其中 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

又 $EF = DE + CF + l = \frac{b}{\tan \theta} + b \tan \theta + l = b \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) + l$

$$= \frac{b}{\sin \theta \cos \theta} + l,$$

故 $l = \frac{a(\sin \theta + \cos \theta)}{\sin \theta \cos \theta} - \frac{b}{\sin \theta \cos \theta}$, 其是 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(2) 设 $t = \sin \theta \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$, 其中 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$, 则

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2}, \quad \text{其中 } t \in (1, \sqrt{2}], \quad \text{故有 } l = \frac{2(at - b)}{t^2 - 1},$$

$$t \in (1, \sqrt{2}].$$

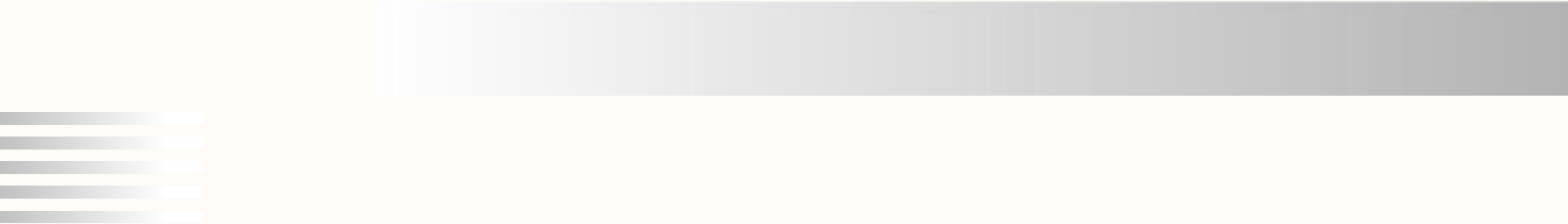
以下求解同改编题1, 得平板车要想顺利通过直角走廊, 其长度不能超过 $(2\sqrt{2}a - 2b)\text{m}$.



策略二

回归“四基”，

激活数学思维的基础

The image features a light beige background. At the top, there is a long, thin, light gray horizontal bar. On the left side, there are several horizontal bars of varying lengths and shades of gray, creating a layered, decorative effect.

**四基：基础知识、基本技能、基本
数学活动经验、基本数学思想方法。**

例6 (2010年浙江理16) 已知平面向量 $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ($\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, $\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$) 满足 $|\vec{\beta}|=1$, 且 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}-\vec{\alpha}$ 的夹角 120° , 则 $|\vec{\alpha}|$ 的取值范围是_____.

分析 由于 $\vec{\beta} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} - \vec{\alpha})$, $\therefore |\vec{\alpha} + (\vec{\beta} - \vec{\alpha})|^2 = 1$,
 $|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta} - \vec{\alpha}|^2 - |\vec{\alpha}| |\vec{\beta} - \vec{\alpha}| - 1 = 0$,

由二次方程根的特征, 由于 $|\vec{\beta} - \vec{\alpha}| > 0$,

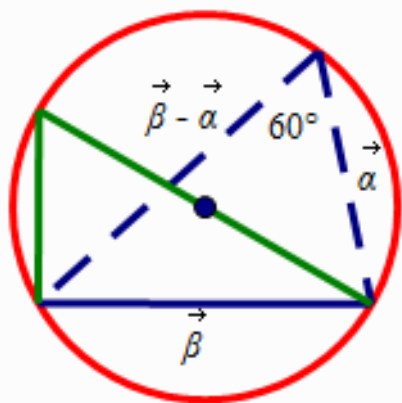
$$\therefore |\vec{\alpha}|^2 - 4(|\vec{\alpha}|^2 - 1) \geq 0,$$

$$\therefore |\vec{\alpha}|^2 \leq \frac{4}{3}, \quad 0 < |\vec{\alpha}| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad \text{即 } \vec{\alpha} \in \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right].$$

分析 如果充分考虑 $\vec{\beta} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} - \vec{\alpha})$,

的几何意义, 发现:

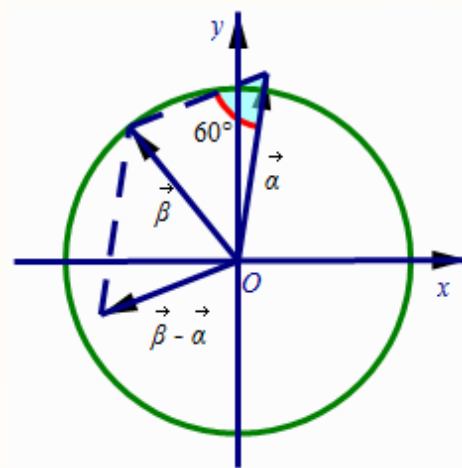
$|\vec{\alpha}|$ 不超过图中圆的直径.



分析 如果在单位圆中充

分考虑 $\vec{\beta} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} - \vec{\alpha})$, 的几何意义,

发现: 利用正弦定理也可求得结果。



例7(2010年山东卷理9) 设 $\{a_n\}(n \in N^*)$ 是等比数列, 则“ $a_1 < a_2 < a_3$ ”是数列 $\{a_n\}$ 是递增数列的
(A)充分而不必要条件 (B)必要而不充分条件
(C)充分必要条件 (D)既不充分也不必要条件

解: 设等比数列的公比为 q , 若 $a_1 < a_2 < a_3$,
则 $a_1 < a_1 q < a_1 q^2$,

$$\begin{cases} a_1 - a_2 < 0 \\ a_2 - a_3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1-q) < 0 \\ a_1q(1-q) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 < 0 \\ 1-q > 0 \\ q(1-q) > 1 \end{cases}$$

$$\text{or } \begin{cases} a_1 > 0 \\ 1-q < 0 \\ q(1-q) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 < 0 \\ 0 < q < 1 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} a_1 > 0 \\ q > 1 \end{cases}$$

答案：选C.

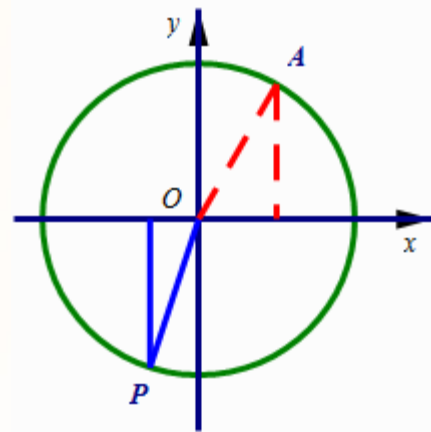
要强化对数列基本属性的认识, 什么情况下数列递增, 不用死记, 要会分析.

例8(2010年安徽卷理9)动点 $A(x, y)$ 在圆 $x^2+y^2=1$ 上绕坐标原点沿逆时针方向匀速旋转, 12秒旋转一周. 已知时间 $t=0$ 时, 点 A 的坐标是 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 则当 $0 \leq t \leq 12$ 时, 动点 A 的纵坐标 y 关于 t (单位: 秒)的函数的单调递增区间是

A、 $[0, 1]$ B、 $[1, 7]$

C、 $[7, 12]$ D、 $[0, 1]$ 和 $[7, 12]$

解法1 $y = \sin\left(\frac{2\pi}{12}t + \varphi\right),$



$$t = 0, y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}, \quad y = \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$0 \leq t \leq 12 \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{3},$$

函数的单调递增区间满足:

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{or} \quad \frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 0 \leq t \leq 1 \quad \text{or} \quad 7 \leq t \leq 12,$$

单调递增区间是[0, 1]和[7, 12].

例9(2010年辽宁理10) 已知点 P 在曲线 $y = \frac{4}{e^x + 1}$ 上,

α 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角,则 α 的取值范围

- 是 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$
- (A) (B) (C) (D)

$$y' = \frac{-4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{-4}{e^x + 2 + e^{-x}} = \tan \alpha \in [-1, 0),$$

$$0 \leq \alpha < \pi \Rightarrow \frac{3\pi}{4} \leq \alpha < \pi.$$



策略三

回归数学本质，

激活数学思维的切换的路径

优化数学思维方式， 强化揭示数学本质的意识

例10 在平面直角坐标系 xOy 中, 设 A, B, C 是圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上相异三点, 若存在正实数 λ, μ , 使得 $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$, 则 $\lambda^2 + (\mu - 3)^2$ 的取值范围是_____.

分析 由 $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$, 有 $\mu\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \lambda\overrightarrow{OA}$.

$$\overrightarrow{OC}^2 = (\lambda\overrightarrow{OA})^2 + 2\lambda\mu\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + (\mu\overrightarrow{OB})^2$$

$$\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu\cos\theta = 1. \quad (\angle AOB = \theta)$$

$$\because -1 < \cos\theta < 1, \lambda > 0, \mu > 0,$$

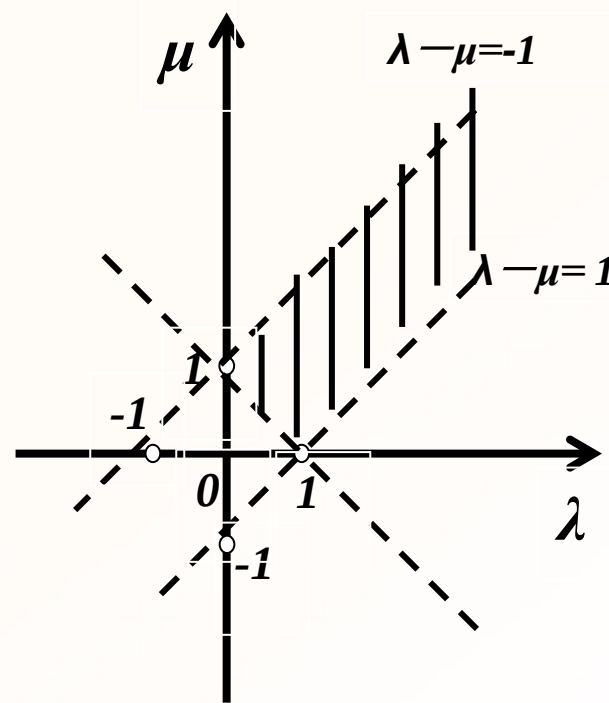
$$\therefore \lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu < 1 \text{ 且 } \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu > 1.$$

所以问题的本质是，只要求在坐标平

面 $\lambda O\mu$ 中，当
$$\begin{cases} \lambda > 0 \\ \mu > 0 \\ -1 < \lambda - \mu < 1 \\ \lambda + \mu > 1 \end{cases}$$

时，求点 (λ, μ) 到点

$(0, 3)$ 的距离的平方
的范围. 用线性规
划思想即可求得结果
如下: $(2, +\infty)$



例11 函数 $y = f(x)$ 的图像与直线 $x = 2010$ 的交点个数是_____个.

(答案: 0或1)

说明 本题主要考察学生对函数本质的理解

$$\therefore k_{OA} = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 0}, k_{OC} = \frac{y_2 - 0}{-\frac{P}{2} - 0} = \frac{-2y_2}{p},$$

$$\text{又} \because y_1^2 = 2px_1, \therefore k_{OA} = \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{2p}} = \frac{2p}{y_1}.$$

又因为 AB 是经过抛物线的焦点的弦，
所以结论 $y_1 y_2 = -p^2$ 成立.

$$\therefore k_{OC} = \frac{2P^2}{y_1} \cdot \frac{1}{p} = \frac{2p}{y_1} = k_{OA}.$$

所以 A, O, C 三点共线. 又经验证, 当 $AB \perp x$ 轴时, 命题也成立. 因此直线 AC 过原点 O .

注意: $AB \perp x$ 轴时的情况。

拓广一: 设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 又抛物线的准线与 x 轴交于点 E , 点 C 在抛物线的准线上, 且 $BC \parallel x$ 轴. 求证: 直线 AC 经过线段 EF 的中点.

拓广二：（2001广东、河南高考21） 已知椭圆

$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右准线 l 与 x 轴相交于点 E , 过椭圆右焦点 F 的直线与椭圆相交于 A, B 两点, 点 C 在右准线 l 上, 且 $BC \parallel x$ 轴.

求证: 直线 AC 经过 EF 线段的中点.

拓广三：设点 F 是圆锥曲线的一个焦点，直线 l 是对应的一条准线，且 l 与圆锥曲线的对称轴交于 E ， AB 是过 F 的弦， C 点是准线 l 上一点， BC 平行于圆锥曲线的对称轴， AC 与 EF 交于点 M ，则 M 是线段 EF 的中点。



策略四

回归数学观念系统，
激活数学思维的调控意识



构建数学思想体系，强化用数学思想指导解题的意识

一要强化八大数学思想：通过回顾做过的练习，用实例反思以下数学思想.

①集合与对应思想

②归纳和演绎思想

③符号化与变换思想

④函数与方程思想

⑤数形结合思想

⑥分类讨论思想

⑦化归与转化思想

⑧特殊化与一般化思想

二要强化十大数学基本方法：通过回顾做过的练习，用实例反思以下数学方法.

①分析法和综合法 ②反证法

③完全归纳法 ④配方法

⑤换元法 ⑥割补法

⑦比较法 ⑧放缩法

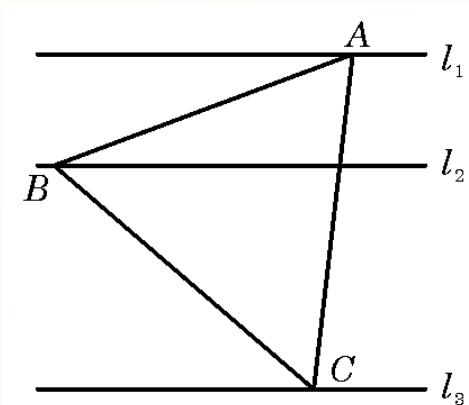
⑨构造法 ⑩定义法

(1) 强化应用函数与方程思想意识

例13 如图 l_1, l_2, l_3 是同一平面内的三条平行直线, l_1 与 l_2 间的距离是1, l_2 与 l_3 间的距离是2, 正三角形的三顶点分别在 l_1, l_2, l_3 上, 则 $\triangle ABC$ 的边长是_____.

分析 设 $\triangle ABC$ 的边长为 x ,

则 $AD = \frac{x}{3}$.



由余弦定理有

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \frac{\pi}{3},$$

$$\text{即 } BD^2 = x^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 2x\left(\frac{x}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3},$$

由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$ 有

$$\frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} x \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} x \cdot 2,$$

$$\text{解之得 } x = \frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

(2) 强化应用化归转化思想的意识

例14 函数 $f(x) = \frac{\sin x - 1}{\sqrt{3 - 2\cos x - 2\sin x}}$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 的值域是_____.

分析：将 $f(x)$ 的表达式变形为

$$f(x) = -\frac{|1 - \sin x|}{\sqrt{(1 - \sin x)^2 + (1 - \cos x)^2}}.$$

此结构与解析几何中点到直线的距离公式颇为相似，因此可将函数的值域问题转化为解析几何问题.

$\frac{|1 - \sin x|}{\sqrt{(1 - \sin x)^2 + (1 - \cos x)^2}}$ 表示平面直角坐标中定点

$P(1,0)$ 到动直线 $l: (1 - \sin x)X + (1 - \cos x)Y = 0$

的距离 d ,显然, l 过点 P 时, $d_{\min} = 0$,

$l \perp OP$ 时, $d_{\max} = 1$,故 $d \in [0,1]$,

因此 $f(x) = -d \in [-1,0]$.

例15 如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$

中，底面为直角三角形，

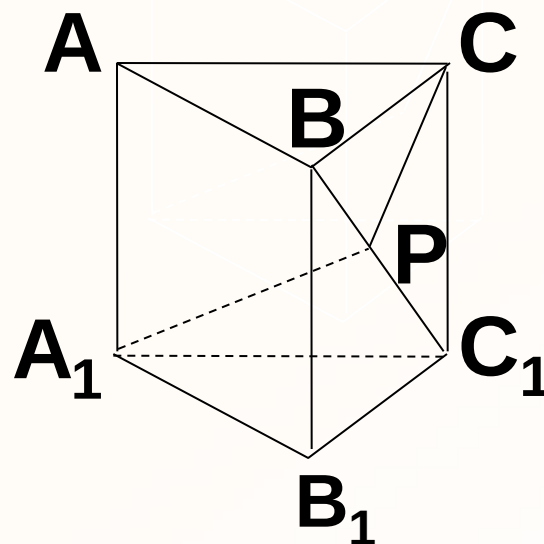
$\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6$,

$BC = CC_1 = \sqrt{2}$, P 是 BC_1

上一动点，则 $CP + PA_1$

的最小值_____.

答案: $5\sqrt{2}$.

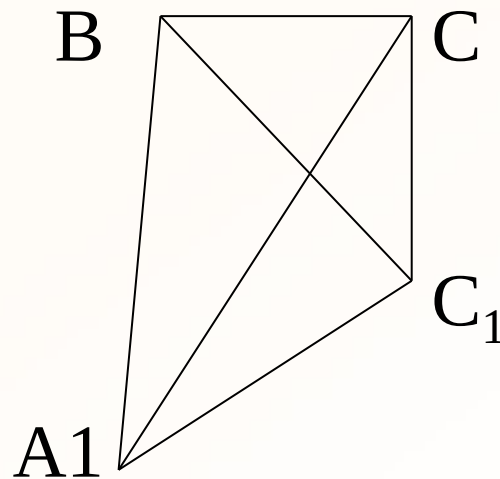


提示：连 A_1B , 沿 BC_1 将 $\triangle CBC_1$ 展开与 $\triangle A_1BC_1$ 在同一个平面内, 如图所示, 连 A_1C , 则 A_1C 的长度就是所求的最小值.

通过计算可得 $\angle A_1C_1B = 90^\circ$,

又 $\angle BC_1C = 45^\circ$, $\therefore \angle A_1C_1C = 135^\circ$,

由余弦定理可求得 $AC_1 = 5\sqrt{2}$.



在 $RT \triangle OCA_1$ 中, $|\overrightarrow{OC}| = 2\sqrt{2}, |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{2}$,

$$\therefore \angle COA_1 = \frac{\pi}{6}, \therefore \angle COA_2 = \angle COA_1 = \frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore \angle COB = \frac{\pi}{4}, \therefore \angle A_1OB = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

$$\angle A_2OB = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}.$$

因此向量 $\overrightarrow{OA}$ 与向量 $\overrightarrow{OB}$ 夹角的取值范围是

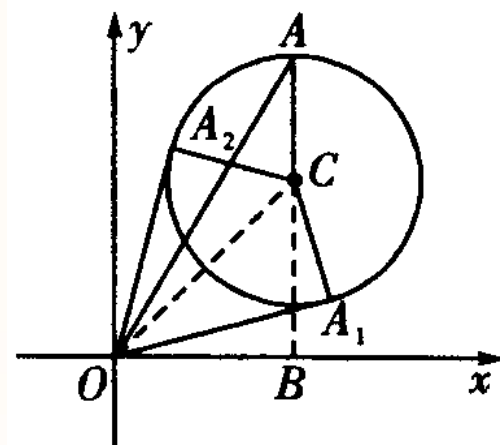
$$\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right].$$

(3) 强化应用数形结合思想意识

例16 已知向量 $\overrightarrow{OB} = (2, 0)$, 向量 $\overrightarrow{OC} = (2, 2)$, 向量 $\overrightarrow{CA} = (\sqrt{2} \cos \alpha, \sqrt{2} \sin \alpha)$, 则向量 $\overrightarrow{OA}$ 与向量 $\overrightarrow{OB}$ 夹角的取值范围是_____.

解: 如图, 向量 $\overrightarrow{CA}$ 的终点 A 在以 $C(2, 2)$ 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的

圆上, OA_1, OA_2 是圆的两条切线, 切点分别为 A_1, A_2 ,



(4) 强化应用一般与特殊思想的意识

例17 (2009浙江湖州高二统考) 对任意 $x \in R$, 若 $f'(x) > f(x)$, 且 $a > 0$, 比较 $f(a)$ 与 $e^a \cdot f(0)$ 的大小.

分析 由 $f(a)$ 与 $e^a \cdot f(0)$ 的结构, 联想到

$e^0 \cdot f(a)$ 与 $e^a \cdot f(0)$, 于是建构 $y = \frac{f(x)}{e^x}$,

则 $y' = \frac{e^x(f'(x) - f(x))}{e^{2x}} > 0$.

解 设 $y = \frac{f(x)}{e^x}$, 则 $y' = \frac{e^x(f'(x) - f(x))}{(e^x)^2} > 0$,

所以 $y(a) > y(0)$, 即 $f(a) > e^a \cdot f(0)$.

说明 本题考查构造函数解决问题的意识与能力, 本题求解过程体现了构造、推理等重要的数学思维方式.



策略五

模式识别，

激活数学思维的切入点

模式识别

(1) 模式识别的基本含义

①在学习数学的过程中，所积累的知识和经验经过加工会得出一些长久保存价值或基本重要性的典型模式与重要类型，我们称为解题基本模式，简称模式. 典型结构与重要类型常常是问题的深层结构.

②当我们遇到一个新问题时，首先辨认它属于已经掌握的哪个基本模式，然后检索出相应的解题方法来解决，这是数学解题中的基本思考，也是解高考题的重要策略，我们叫做模式识别.

③拿到一道高考题，在理解题意后，立即思考问题属于哪一学科、哪一章节？与这一章节的类型比较接近？解决这个类型有哪些方法？哪个方法可以首先拿来试用？这样一想，下手的地方就有了，前进的方向也大体确定了。这就是高考解题中的模式识别。

①化归为课堂上已经解过的题式。

②化归为往年的高考题（或其变形）。

①直接用。

②转化用。

③综合用。

例 数学活动经验的调用。

例 已知函数 $f(x) = a - \frac{1}{x} - \ln x$ ($a \in \mathbb{R}$)
若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$),
求证: $x_1 + x_2 > 2$.

例18（2008江苏11题）设 x, y, z 为正实数，满足 $x - 2y + 3z = 0$ ，则 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值_____.

案例 重视数学经验的积累

1、破解隐含条件的方法.

(1) 从数学定义中挖掘隐含条件

例19（2008宁夏、海南改编）已知点 P 在抛物线 $y^2 = 4x$ 上，那么点 P 到点 $Q(2, -1)$ 的距离与点 P 到抛物线焦点距离之和取得最小值时，点 P 的坐标为_____.

评析:有些数学问题,部分已知条件隐含在数学概念、定义之中,而数学概念、定义又是解题的先导,在解题中若主动与定义接触,则能迅速、合理的解决问题. 本题需要挖掘的隐含条件为抛物线定义中的 $p_F = p_S$, 故对定义的挖掘是解题顺利进行的第一步.

(2) 从几何意义中挖掘隐含条件.

例20 (2008福建) 若实数 x, y 满足
$$\begin{cases} x - y + 2 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases},$$
 则 $\frac{y}{x}$ 的取值范围是_____.

解析: 易求得点 A 的坐标是 $(2, 4)$, 这样 OA 的斜率 $k = 2$, 所以 $\frac{y}{x} \in [2, +\infty)$.

本题的解题关键是挖掘所给式子 $\frac{y}{x}$ 的几何意义, 故数形结合是破解隐含条件的一种重要方法.

(3) 从题目结构中挖掘隐含条件.

例21 (2006江苏改编) 设 a 是正数, 求证: $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq a + \frac{1}{a}$.

评析: 若题设条件中隐含着与某些概念、公式具有类似结构的数式或图形信息, 则应抓住结构特征, 提示隐含条件, 用构造的方法转化研究对象, 使问题顺利解决. 本题隐含的信息为形如函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 的单调性的处理.

(4) 从解题过程中挖掘隐含条件.

例22 (2008辽宁) 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 设 $c_n = \frac{b_n}{a_n} (n \in N^+)$.

①数列 $\{c_n\}$ 是否为等比数列? 证明你的结论;

②设数列 $\{\ln a_n\}, \{\ln b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n . 若 $a_1 = 2, \frac{S_n}{T_n} = \frac{n}{2n+1}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

分析:由已知条件可得出 $\{\ln a_n\}, \{\ln b_n\}$ 分

别是公差为 $\ln q_1$ 和 $\ln q_2$ 的等差数列, $\frac{S_n}{T_n} = \frac{n}{2n+1}$

这个条件也可转化为 $\frac{2 \ln a_1 + (n-1) \ln q_1}{2 \ln b_1 + (n-1) \ln q_2} = \frac{n}{2+1},$

这里隐含着 n 是任意正整数这一条件, 可将 $n = 1, 2, 3$ 分别代入即可求出 b_1, q_1, q_2 .

(5) 从取值范围中挖掘隐含条件.

例23 (2006安徽改编) 如果 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三个内角的余弦值分别等于 $\triangle A_2B_2C_2$ 的三个内角的正弦值, 则 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 的形状为_____.

分析: 由于三角形的内角和是 180° , 所以

$\Delta A_2B_2C_2$ 的三个内角的正弦值都大于0,即 $\Delta A_1B_1C_1$ 的三个内角的余弦值都大于0, 则 $\Delta A_1B_1C_1$ 是锐角三角形,再利用三角形的内角和是 180° , 对 $\Delta A_2B_2C_2$ 是锐角三角形的情况进行排除.

(6) 从不变因素中挖掘隐含条件

例24 (2006全国改编)已知圆 $C : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$,
直线 $l : (2m + 1)x + (m + 1)y = 7m + 4 \ (m \in R)$.

①求证: 不论 m 取什么实数, 直线 恒与圆 C 相交;

②求直线 被圆 C 截得的线段的最短长度及此时 m 的值.

分析: 本题如果联立直线与圆的方程解方程组, 然后考虑 $\Delta \geq 0$ 是否成立, 则运算量很大, 很难得到正确结论. 若注意到直线

$(2m + 1)x + (m + 1)y = 7m + 4 (m \in R)$ 恒过定点 $N(3, 1)$,

则问题容易得解.

2、解决恒成立问题与存在性问题的解题经验.

3、应用定义解题的经验.



策略六

回归通性通法，

激活数学思维的常规通道

重视数学通性通法的考查，贴近中学教学

数学思想和基本数学方法蕴含于数学基础知识中，表现为数学观念，它们与数学知识的形成过程同步发展，同时又贯穿于数学知识的学习、理解和应用过程。对数学思想方法的考查是考查考生能力的必由之路。历年的试卷，重视数学通性通法，尤其是待定系数法、配方法、换元法、消元法等方法

的考查。

例25(2010年北京理15)

已知函数 $f(x) = 2\cos 2x + \sin^2 x - 4\cos x$.

(I) 求 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 的值;

(II) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

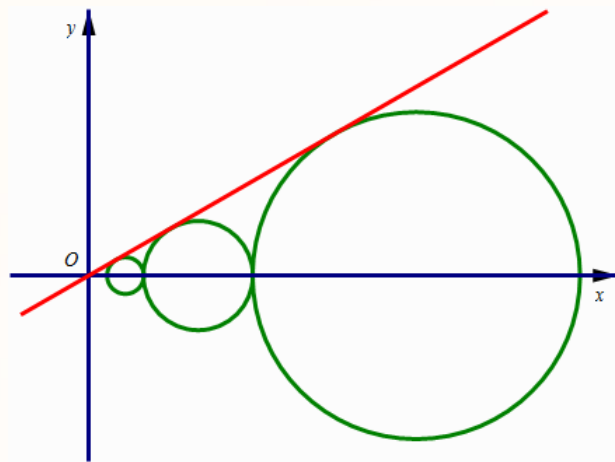
$$f(x) = 3\left(\cos x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}, x \in R.$$

例26 (2010年安徽文卷21) C_1 ,

$C_2, \dots, C_n, \dots$ 是坐标平面上的一列圆, 它们的圆心都在x轴的正半轴上, 且都与直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 相切, 对每一个正整数 n , 圆 C_n 都与圆 C_{n+1} 相互外切, 以 r_n 表示 C_n 的半径, 已知 $\{r_n\}$ 为递增数列.

(I) 证明: $\{r_n\}$ 为等比数列;

(II) 设 $r_1=1$, 求数列 $\left\{\frac{n}{r_n}\right\}$ 的前项和.



$$a_{n+1} - a = r_n + r_{n+1} = 2(r_{n+1} - r_n) \Rightarrow r_{n+1} = 3r_n.$$

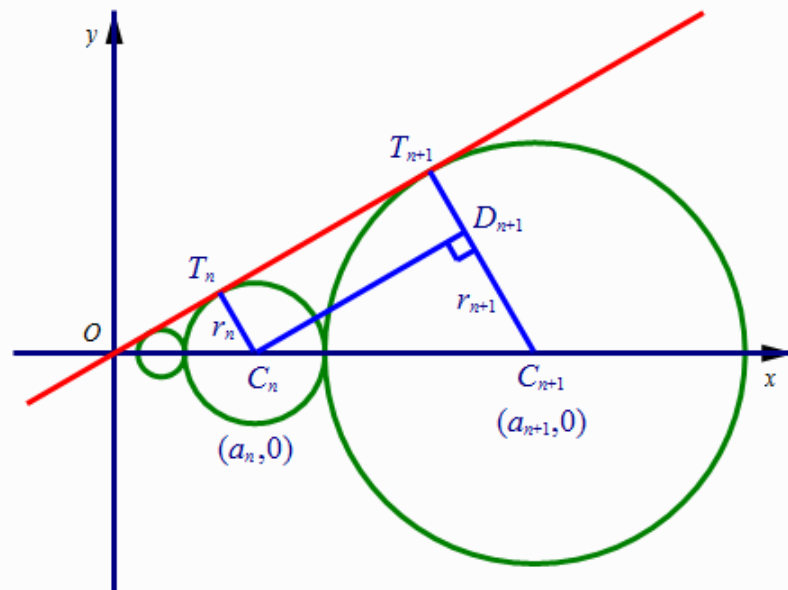
故 $\{r_n\}$ 为公比 $q=3$ 的等比数列.

$$\frac{n}{r_n} = n \cdot 3^{1-n},$$

$$S_n = 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^{-1} + \cdots + n \cdot 3^{1-n},$$

$$\frac{S_n}{3} = 1 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + \cdots + (n-1) \cdot 3^{1-n} + n \cdot 3^{-n},$$

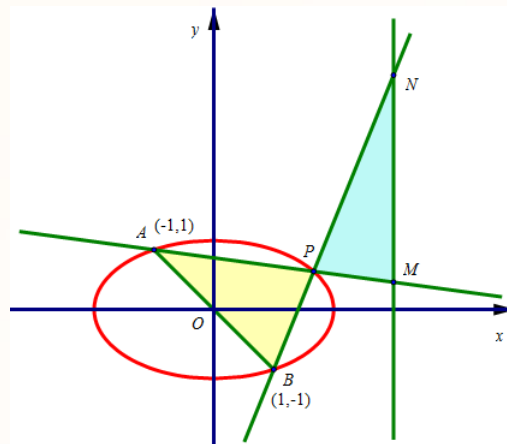
$$S_n = \frac{9}{4} - \frac{1}{2} \left(n + \frac{3}{2} \right) \cdot 3^{1-n} = \frac{9 - (2n+3) \cdot 3^{1-n}}{4}.$$



例28(2010北京卷理19) (本小题14分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 B 与点 $A(-1, 1)$ 关于原点 O 对称, P 是动点, 且直线 AP 与 BP 的斜率之积等于 $-\frac{1}{3}$.

(I) 求动点 P 的轨迹方程;

(II) 设直线 AP 和 BP 分别与直线 $x=3$ 交于点 M, N , 问: 是否存在点 P 使得 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PMN$ 的面积相等? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.





策略七

回归主干知识，

激活数学思维的深化点

1、要重视主干内容的复习根据新课程的
教学要求和江苏省高考卷的命制的特色,解
答题的复习应注意八大块主干知识:函数;
不等式;数列;复数;曲线与方程(解几);
空间图形(立几);向量;概率与统计.

八块主干知识在高考命题中的主要综合
(交汇点)是:“函数、方程与不等式的综
合”、“函数与数列的综合”、“解析几何与
几
何、代数、三角的综合”、“向量的应用”.

(1) 三角函数要抓好基础，复习中要把重点放在三角函数的图象和性质、两角和的正弦、余弦和正切及三角形中的三角函数问题等方面。对图象和性质、求值和化简问题要达到熟练、准确的程度.

(2) 平面向量，复习中要注意与代数、三角和解析几何的融合，平面向量的数量积的应用应作为重中之重.

(3) 立体几何要偏重“平行、垂直关系的证明与探究”. 复习时要重视证明、运算、推理的规范训练.

(4) 解析几何复习中要以直线和圆、圆锥曲线的标准方程为重点, 要重视体现解析几何基本思想的问题的学习, 重视以椭圆为背景的圆的问题的学习.

(5) 数列与不等式综合是历年高考把关题, 在复习中要特别重视以等差、等比数列为载体的相关恒等式证明的代数推理题的学习与训练.

(6) 要重视以函数与导数、不等式综合为载体的代数推理题.

2、要加强填空题的专项训练

在一轮复习中，要加强解填空题的专题复习，掌握解填空题的技能与技巧.

3、关注应用，注重探究性问题

数学知识的应用，是新课标强调的重点之一.这就要求我们在复习中，除了要关注课本应用题的变形之外，还要留意与我们生活密切相关的实际问题，提高建模、解模和验模能力.

说明：本例是以二次函数为主线的函数问题

二次函数是高中生所学的最正规、最完备的函数之一，它最能体现学生对函数思想的把握，是联系高中与大学知识的主要纽带。二次函数的基本性质，二次函数与方程根的讨论，二次函数与二次不等式、二次方程的综合问题都是考查的重点。

例30 (2009年辽宁理) 若 x_1 满足 $2x + 2^x = 5$,
 x_2 满足 $2x + 2\log_2(x-1) = 5$, 则 $x_1 + x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

分析 审视条件、结构特点, 考虑代换:

$$\text{令 } x-1=t, \text{ 则有 } t+2^t=\frac{3}{2} \quad \textcircled{1}$$

$$\log_2 t+t=\frac{3}{2} \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ 即为 } \log_2 t+2^{\log_2 t}=\frac{3}{2}.$$

审视数值发现： t_1, t_2 是方程①和③的根，

令 $f(t) = t + 2^t$ ，（联想—转化）

$$\text{则 } f(t_1) = f(\log_2 t_2) = \frac{3}{2}.$$

$\because f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增, $\therefore t_1 = \log_2 t_2$,

$$\text{因此 } t_1 + t_2 = t_1 + 2^{t_1} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore x_1 + x_2 = t_1 + 1 + t_2 + 1 = \frac{7}{2}.$$

本题考查了函数与方程的思想、集合与对应的思想.

结构是数学问题的搭配形式，某些问题已知的数式结构中常常隐含着某种特殊的关系. 审视结构要对结构进行分析、加工和转化, 以实现解题突破. 如例10审视结构特征：联想到平方的策略。又如：例12中的结构引发换元思想. 又如：例11中 $\frac{3}{2}$ 暗示了解题方向.



策略八

反思易错误区，激活

误入数学思维误区防范意识

查找出错根源，强化杜错意识

解题和考试中的错误概括起来一般有下列几种类型：

（1）审题性错误：主要是由于审题不仔细、不理解题目的意思，无法找到解题思路等导致的错误.

（2）知识性错误：主要是由于基础知识掌握的不牢靠、记忆不清，用错概念、公式、法则、性质、定理等导致的错误.

(3) 方法性错误：主要是由于选择的解题方法不当或运算量太大或无法求解等导致的错误.

(4) 运算性错误：主要是由于粗心大意或算理不清造成运算上的错误，这是同学们出现频率较高的一种错误.

(5) 习惯性错误：主要是指由于不良习惯造成看错、抄错（草稿纸上正确，抄到答卷上出错）、填错、书写潦草、格式不规范、理由不完整等导致的错误.

产生错误的根源还有：立体几何论证中的“跳步”、代数论证中“以图代证”、解题过程中某一步缺少逻辑依据、遗漏某一极端情况造成求解不够完备、讨论中以偏概全等. 杜绝错误可以从三个方面入手：第一，对每个知识系统分类挖掘自己在这部分解题中的一些易忘点、易错点和易混点；第二，配备错题本，将自己在解题和考试中的错误记录下来，通过定期回顾、反思，防止再错. 第三，克服自身的不良审题习惯和解题习惯，提高运算推理的正确率.

例31 在 $\triangle ABC$ 中, $3\sin A + 4\cos B = 6$,
 $3\cos A + 4\sin B = 1$, 则 $\angle C$ 的大小为
_____.

错解 由 $\begin{cases} 3\sin A + 4\cos B = 6 \\ 3\cos A + 4\sin B = 1 \end{cases}$ 平方相加得

$$\sin(A+B) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin C = \frac{1}{2} \therefore C = \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \frac{5}{6}\pi$$

错解分析 审题不充分, 条件 $\cos A < \frac{1}{3}$ 比较隐蔽, 未能发现. 这里提示我们要注意对题目条件的挖掘.

正解 由 $\begin{cases} 3\sin A + 4\cos B = 6 \\ 3\cos A + 4\sin B = 1 \end{cases}$ 平方相加得

$$\sin(A + B) = \frac{1}{2}$$

(审视条件、结论、结构、数值特点选择平方相加的策略)

$$\therefore \sin C = \frac{1}{2} \therefore C = \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{若 } C = \frac{5}{6}\pi, \text{ 则 } A + B = \frac{\pi}{6} \text{ (求解),}$$

$$\therefore 1 - 3\cos A = 4\sin B > 0 \therefore \cos A < \frac{1}{3}$$

(发现隐含条件)

$$\text{又 } \frac{1}{3} < \frac{1}{2}, \therefore A > \frac{\pi}{3} \therefore C \neq \frac{5}{6}\pi \therefore C = \frac{\pi}{6}.$$

(验证结论)

说明 范围是对数学概念、公式、定理中涉及的一些量以及相关解析式的限制条件.审视范围要适时利用相关量的约束范围,从整体上把握问题的解决方向.如:上例中,需要对 $\angle A$ 的范围,进行“2次估计”.

策略九

正难则反，激活数学的逆向思维

“正难则反”是一个重要的解题策略，顺向推有困难时就逆向推，直接证有困难时就间接证，从左边推右边有困难时就从右边推左边。主要办法有两个：

其一，用分析法，执果索因。

其二，用反证法，从否定结论入手，找矛盾。

例32(1)已知 a, b 为实数, 并且 $e < a < b$, 其中 e 是自然对数的底, 证明 $a^b > b^a$;

(2) 如果正实数 a, b 满足 $a^b = b^a$, 且 $a < 1$, 证明:
 $a = b$.

证明: (1) 考虑函数 $y = \frac{\ln x}{x} (0 < x < +\infty)$, 因为 $x > e$ 时 $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$, 所以函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 在 $(e, +\infty)$ 内是减函数, 对 $e < a < b$, 有 $\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}$, 所以 $a^b > b^a$.

(2) 假设 $a=b$ 不成立, 由 $0 < a < 1$ 知指数函数

$$f(x)=a^x \text{ 为减函数, 有 } \frac{a^b - a^a}{a - b} > 0. \quad \textcircled{1}$$

又有幂函数 $g(x)=x^a (a > 0)$ 在 $(0, +\infty)$

$$\text{内为增函数, 有 } \frac{a^a - b^a}{a - b} > 0. \quad \textcircled{2}$$

①+ ②并代入 $a^b = b^a$

$$\text{得 } 0 < \frac{a^b - a^a}{a - b} + \frac{a^a - b^a}{a - b} = \frac{a^b - b^a}{a - b} = 0,$$

这一矛盾说明, 只有 $a=b$.



策略十

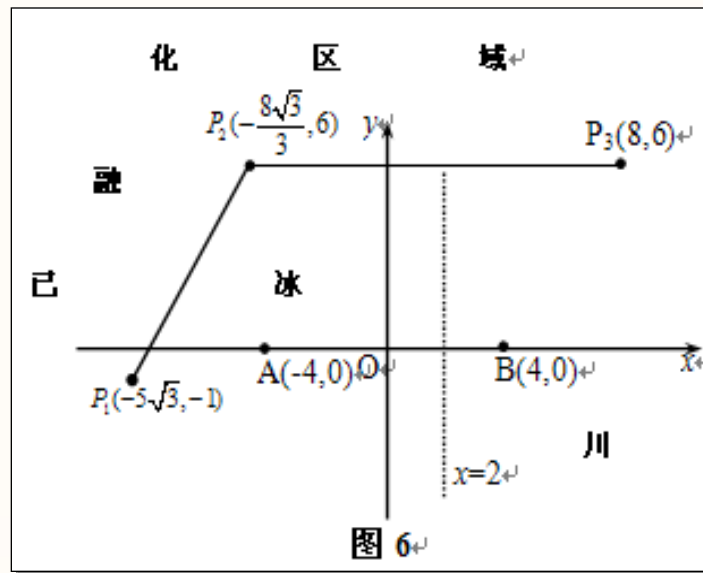
关注新情境、新题型，
激活数学思维的创新意识

考查应用题和探究性问题

例33（2010湖南理20）为了考察冰川的融化状况，一支科考队在某冰川上相距8km的 A, B 两点各建一个考察基地. 视冰川面为平面形，以过A, B 两点的直线为x轴，线段AB的垂直平分线为y轴建立平面直角坐标系（图6）. 在直线 $x=2$ 的右侧，考察范围为到点B的距离不超过 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ km的区域；在直线 $x=2$ 的左侧，考察范围为到A, B两点的距离之和不大于 $4\sqrt{5}$ km的区域.

(I) 求考察区域边界曲线的方程;

(II) 如图6所示, 设线段 P_1P_2 、 P_2P_3 是冰川的部分边界线 (不考虑其他边界), 当冰川融化时, 边界线沿与其垂直的方向朝考察区域平行移动, 第一年移动0.2km, 以后每年移动的距离为前一年的2倍, 求冰川边界线移动到考察区域所需的最短时间.



分析 (I) 根据所给已知条件直接建立等式求轨迹;

(II) 求直线与椭圆之间的最短距离.

【解题过程】(I) 设边界曲线上点 P 的坐标为 (x, y)

当 $x \geq 2$ 时, 由题意知 $(x-4)^2 + y^2 = \frac{36}{5}$.

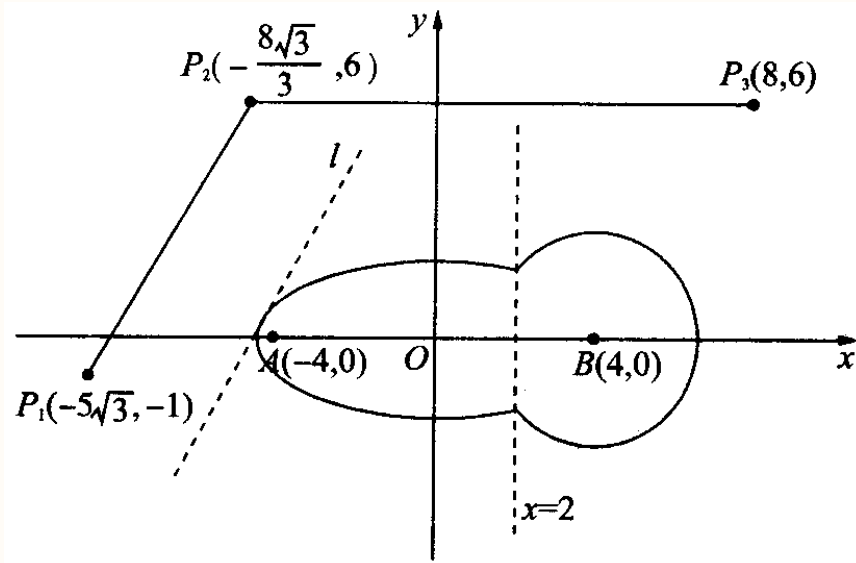
当 $x < 2$ 时, 由 $|PA| + |PB| = 4\sqrt{5}$ 知, 点 P 在以 A, B 为焦点, 长轴长为 $2a = 4\sqrt{5}$ 的椭圆上. 此时短半轴长 $b = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4^2} = 2$.

因而其方程为 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$.

故考察区域边界曲线(如图)的方程为

$$C_1 : (x-4)^2 + y^2 = \frac{36}{5} (x \geq 2) \text{ 和}$$

$$C_2 : \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1 (x < 2).$$



(II) 设过点 P_1, P_2 的直线为 l_1 过点 P_2, P_3 的直线为 l_2 , 则直线 l_1, l_2 的方程分别为 $y = \sqrt{3}x + 14, y = 6$.

设直线 l 平行于直线 l_1 , 其方程为 $y = \sqrt{3}x + m$, 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$.

消去 y 得 $16x^2 + 10\sqrt{3}x + 5(m^2 - 4) = 0$.

由 $\Delta = 100 \times 3m^2 - 4 \times 16 \times 5(m^2 - 4) = 0$,

解得 $m = 8$, 或 $m = -8$.

从图中可以看出, 当 $m=8$, 时, 直线 l 与 C_2 的公共点到直线 l_1 的距离最近, 此时直线 l 的方程 $y = \sqrt{3}x + 8$, l 与 l_1 之间距离为 $d = \frac{|14-8|}{\sqrt{1+3}} = 3$.

又直线 l_2 到 C_1 和 C_2 的最短距离 $d' = 6 - \frac{6\sqrt{5}}{5}$,

所以考察区域边界到冰川边界线的最短距离为3.

设冰川边界线移动到考察区域所需的时间为 n 年, 则由题设及等比数列求和公式,

得 $\frac{0.2(2^n - 1)}{2 - 1} \geq 3$. 所以 $n \geq 4$.

故冰川边界线移动到考察区域所需的最短时间为4年.

说明 本题的关键在于先找出满足条件的等式, 求出边界的方程, 然后把实际问题转化为直线与椭圆的最值问题.

本题是解析几何应用题，是一道创新应用题，是2010年高考命题的一个亮点，也代表了一种趋向，通过命制应用题来定位考查学生的数学应用意识，落实新课程中“发展学生的应用意识”的理念。同时也落实了新课标中对圆锥曲线的要求“了解圆锥曲线的实际背景，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用”。

注重应用意识和创新意识的考查

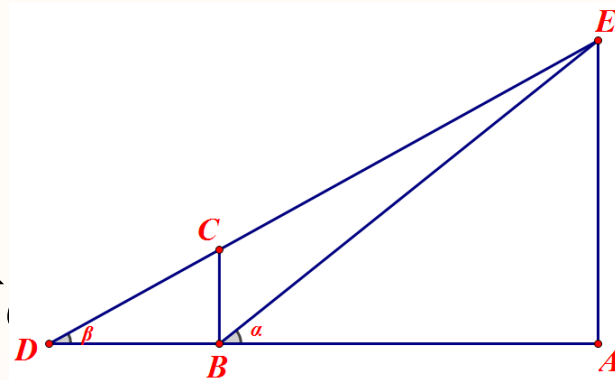
对应用意识的考查体现了数学的价值，就在一些省拥有命题自主权，创造出了一些好的应用问题，它们贴近现实生活实际，强调运用数学思想分析和解决问题的过程，强调数学阅读理解，逐步改变应用问题以“生硬”概率试题为主的倾向，前一段，高考的应用题都变成了概率题。而且有的概率题过于生编硬造，不是考查随机现象。依托概率是可以设计一些很好的应用问题，也有一些很好的概率高考题。

例38(2010年高考江苏卷理科17) (14分)某兴趣小组测量电视塔 AE 的高度 H (单位 m), 如示意图, 垂直放置的标杆 BC 高度 $h=4m$, 仰角 $\angle ABE=\alpha$, $\angle ADE=\beta$

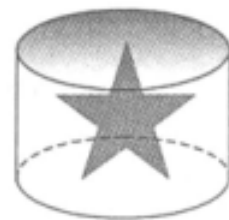
(1)该小组已经测得一组 α 、 β 的值, $\tan\alpha=1.24$, $\tan\beta=1.20$, 请据此算出 H 的值.

(2)该小组分析若干测得的数据后, 发现适当调整标杆到电视塔的距离(单位 m), 使 α 与 β 之差较大, 可以提

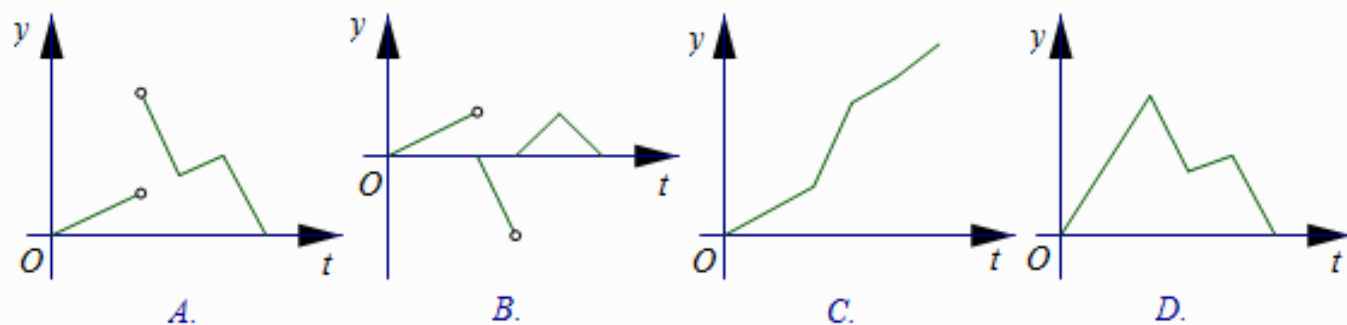
高测量精确度, 若电视塔实际高度为 $125m$, 问 d 为多少时, $\alpha-\beta$ 最大.



例41(2010年高考江西卷理科12). 如图,



一个正五角星薄片(其对称轴与水面垂直)匀速地升出水面, 记 t 时刻五角星露出水面部分的图形面积为 $S(t)$ $S(0)=0$, 则导函数 $y=S'(t)$ 的图像大致为(A)



**灵活的进行知识组合，
形成了具有新意的一批试题**

各块知识结合得非常巧妙，考生需要分析信息，懂得组合分析，找到科学合理的切入口，所谓的套路行不通，用惯套路的会惨败。许多死读书的考生不适应。

回归课本定起点，（科学定位）

变式训练建梯度，（分层教学）

抓住弱点做示范，（示范引领）

突破难点强重点。（扫描难点）

谢谢各位聆听！

祝各位在今年6
月取得辉煌的成绩！