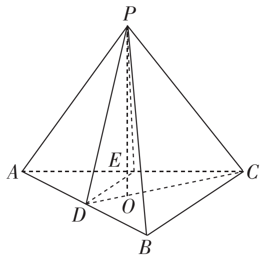
江苏省仪征中学2019届高三年级第一学期12月份冲刺联考热身训练(1)答案

一、填空题：

1.$\{2\}$　2.$\sqrt{5}$　3.100　4.4　5.4　6.$\frac{5}{6}$　7.$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　8.$\frac{5}{4}$　9.70　10.$\frac{\pi}{6}$　11.-4　12.$(-\frac{4}{3},+\infty)$

二、解答题：



1.证明:(1)因为 D,E 分别为 AB,AC 的中点,

所以 $DE/\!/BC$. ………… 2分

又 $DE\subset$平面 PDE,$BC\not\subset$平面 PDE,

所以 $BC/\!/$平面 PDE. ………… 5分

(2)过点 P 作 $PO\perp CD$,垂足为 O.

又平面 $PCD\perp$平面 ABC,$PO\subset$平面 PCD,

平面 $PCD\cap$平面 $ABC=CD$,所以 $PO\perp$平面 ABC.

又因为 $AB\subset$平面 ABC,所以 $AB\perp PO$. ………… 9分

因为 $PA=PB$,D 为 AB 的中点,所以 $AB\perp PD$. ………… 11分

又$\angle PDC$为锐角,一定有 $PO\cap PD=P$,$PO,PD\subset$平面 PCD,所以 $AB\perp$平面 PCD.

又 $PC\subset$平面 PCD,

所以 $AB\perp PC$. ………… 14分

2.解:(1)因为点$(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$在椭圆 C 上,则$\frac{2}{a^2}+\frac{1}{2b^2}=1$,又椭圆 C 的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,可得$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $c=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

所以 $b^2=a^2-c^2=a^2-(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2=\frac{1}{4}a^2$,代入上式,可得$\frac{2}{a^2}+\frac{1}{2\times\frac{1}{4}a^2}=1$,

解得 $a^2=4$,故 $b^2=\frac{1}{4}a^2=1$.

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………… 6分

(2)设 $P(x_0,y_0)$,则 $A(-x_0,-y_0)$,$Q(x_0,-y_0)$.

因为$\overrightarrow{PD}=\lambda\overrightarrow{PQ}$,则$(0,y_D-y_0)=\lambda(0,-2y_0)$,故 $y_D=(1-2\lambda)y_0$.

所以点 D 的坐标为$(x_0,(1-2\lambda)y_0)$. ………… 8分

设 $B(x_1,y_1)$,则 $k_{PB}\cdot k_{BA}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{y_1+y_0}{x_1+x_0}=\frac{y_1^2-y_0^2}{x_1^2-x_0^2}=\frac{(1-\frac{x_1^2}{4})-(1-\frac{x_0^2}{4})}{x_1^2-x_0^2}=-\frac{1}{4}$. ………… 11分

又 $k_{BA}=k_{AD}=\frac{(1-2\lambda)y_0-(-y_0)}{x_0-(-x_0)}=(1-\lambda)\cdot\frac{y_0}{x_0}$,故 $k_{PB}=-\frac{1}{4k_{BA}}=-\frac{x_0}{4(1-\lambda)y_0}$.

又 $PA\perp PB$,且 $k_{PA}=\frac{y_0}{x_0}$,所以 $k_{PB}k_{PA}=-1$,即$-\frac{x_0}{4(1-\lambda)y_0}\cdot\frac{y_0}{x_0}=-1$,解得 $\lambda=\frac{3}{4}$.

所以$\lambda=\frac{3}{4}$. ………… 14分

3.解:(1)据题意,$\pi r^2h=\frac{1}{3}(\pi\times6^2\times16)$,所以 $r^2h=192$,即 $h=\frac{192}{r^2}$. ………… 3分

因为 $16-h>1$,故 $h<15$,即$\frac{192}{r^2}<15$,解得 $r>\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

又 $0<r<6$,所以$\frac{8\sqrt{5}}{5}<r<6$. ………… 5分

(2)①据题意,笔筒的后续加工费用 $y=7a\pi r^2+2a(2\pi rh)+a(\pi\times6^2-\pi r^2+2\pi\times6\times16)$,

整理可得,$y=a\pi(6r^2+4rh+228)$,

又 $h=\frac{192}{r^2}$，故 $y=a\pi(6r^2+4r\times\frac{192}{r^2}+228)=6a\pi(r^2+\frac{128}{r}+38)$.

所以 $y=6a\pi(r^2+\frac{128}{r}+38)$，定义域为$(\frac{8\sqrt{5}}{5},6)$. …………………………………………………… 10 分

②由①可知，$y=6a\pi(r^2+\frac{128}{r}+38)$，$x\in(\frac{8\sqrt{5}}{5},6)$.

所以 $y'=6a\pi(2r-\frac{128}{r^2})=12a\pi\cdot\frac{r^3-64}{r^2}$，…………………………………………………… 12 分

令 $y'=0$，解得 $r=4$，列表如下：

r	$(\frac{8\sqrt{5}}{5},4)$	4	(4,6)
y'	$-$	0	$+$
y	↘	极小值	↗

故当 $r=4$ 时，y 取得极小值，即最小值为 $516a\pi$. …………………………………………………… 15 分

所以，当 $r=4$ 时，笔筒的后续加工费用 y 最小，且 y 的最小值为 $516a\pi$. ………………………… 16 分

三、附加题：

1. 解：(1)因为 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\begin{bmatrix}3&0\\2&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\b&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\\frac{2}{3}+ab&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$.

所以$\begin{cases}a=1,\\\frac{2}{3}+ab=0.\end{cases}$解得 $a=1$，$b=-\frac{2}{3}$. …………………………………………………… 5 分

(2)由(1)得 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0\\2&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3&0\\-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-1)$.

令 $f(\lambda)=0$，解得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$. …………………………………………………… 10 分

2. 解：由直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\rho\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}-\rho\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

整理得，直线 l 的普通方程为 $x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$. …………………………………………………… 2 分

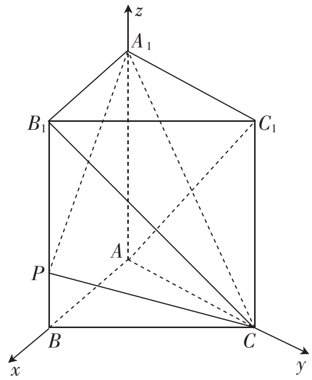
又圆 C 的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}+\cos\theta,\\y=\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)，消去参数可得 $(x-\sqrt{3})^2+y^2=1$.

所以圆 C 的圆心坐标为$(\sqrt{3},0)$，半径为 1. …………………………………………………… 4 分

故圆心 C 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|\sqrt{3}-0+\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=\sqrt{3}$. …………………………………………………… 6 分

所以点 P 到直线 l 的距离的最小值为 $\sqrt{3}-1$. …………………………………………………… 10 分

3.解:(1)分别以 AB,AC,AA_1 所在直线为 x,y,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$,



设 $AA_1=t$,则 $A(0,0,0),C_1(0,4,t),B_1(3,0,t),C(0,4,0)$.

所以$\overrightarrow{AC_1}=(0,4,t),\overrightarrow{B_1C}=(-3,4,-t)$.

因为 $B_1C\perp AC_1$,所以$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{B_1C}=0$,即 $16-t^2=0$,解得 $t=4$.

所以 AA_1 的长为 4. ………………………………………………………… 4 分

(2)因为 $BP=1$,所以 $P(3,0,1)$,又 $C(0,4,0),A_1(0,0,4)$,

故$\overrightarrow{A_1C}=(0,4,-4),\overrightarrow{A_1P}=(3,0,-3)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面 PA_1C 的法向量,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{A_1C},\\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{A_1P},\end{cases}$即$\begin{cases}4y-4z=0,\\ 3x-3z=0,\end{cases}$

取 $z=1$,解得 $y=1,x=1$.

$\therefore\boldsymbol{n}=(1,1,1)$为平面 PA_1C 的一个法向量. ………………………………………………………… 7 分

显然,$\overrightarrow{AB}=(3,0,0)$为平面 A_1CA 的一个法向量. ………………………………………………… 8 分

则 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AB}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{3}{3\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

据图可知,二面角 $P-A_1C-A$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………………… 10 分