

2021 高考数学模拟试卷（1）

南京师范大学《数学之友》

注意事项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1. 本试卷共 6 页，包含选择题（共 12 题）、填空题（共 4 题）、解答题（共 6 题），满分为 150 分，考试时间为 120 分钟。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请您务必将自己的姓名、考试证号等用书写黑色字迹的 0.5 毫米签字笔填写在答题卡上，并用 2B 铅笔正确填涂考试号。
3. 作答试题必须用书写黑色字迹的 0.5 毫米签字笔写在答题卡上的指定位置，在其它位置作答一律无效。
4. 如有作图需要，可用 2B 铅笔作答，并请加黑、加粗，描写清楚。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = A \cup B$ 中有 m 个元素， $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$ 中有 n 个元素. 若 $A \cap B$ 非空，则 $A \cap B$ 的元素个数为（ ）

A. mn B. $m+n$ C. $n-m$ D. $m-n$

2. 设复数 z 满足 $z^2=3+4i$ (i 是虚数单位)，则 $|z|$ 等于（ ）

A. $\sqrt{5}$ B. 5 C. $\sqrt{7}$ D. 7

3. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2, \sigma^2)$ ，且 $P(\xi < 4) = 0.8$ ，则 $P(0 < \xi < 2) =$ （ ）

A. 0.5 B. 0.3 C. 0.4 D. 0.2

4. 由伦敦著名建筑事务所 *Steyn Studio* 设计的南非双曲线大教堂惊艳世界，该建筑是数学与

建筑完美结合造就的艺术品. 若将如图所示的大教堂外形弧线的一段近似看成双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 下支的一部分，且此双曲线的下焦点到渐近线的距离为 2，离心率为 2，则该双曲线的渐近线方程为（ ）

A. $y = \pm\sqrt{3}x$ B. $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ C. $y = \pm x$ D. $y = \pm 2x$

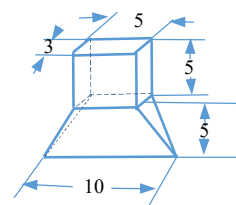
5. 不等式 $|x + \sqrt{2}| < x(x + 2\sqrt{2})$ 的解集为（ ）

A. $(-\infty, -3\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ B. $(-\infty, -2 - \sqrt{2}) \cup (2 - \sqrt{2}, +\infty)$

B. C. $(-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$ D. $(-\infty, -2 + \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$



6. 钺(yuè)的本字其实是“戔(yuè)”，是一种斧头。在中国古代，长江流域以南的少数民族都被称为越人，由于民族很杂部落众多，也称“百越”，有学者指出，“越人”的“越”，其含义可能由“戔”而来，意指这些都是一帮拿着斧头的人。此外，“戔(wù)”的本意和“戔”一样，也是指斧头。如图是一把斧子，它的斧头由铁质锻造，它的形状可以近似看做由上下两个多面体组合而成，上部是一个长方体，下部是一个“楔(xie)形”，其尺寸如图标注(单位: cm)，已知铁的比重为 7.87g/cm^3 ，斧头上用作安装斧柄的洞眼仍看作实心，这只斧头的质量(单位: g)所在的区间为()



- A. (800, 1200) B. [1200, 1600) C. [1600, 2000) D. [2000, 2400)

7. 若 $\cos \alpha + \sin \alpha = \tan \alpha (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$, 则 $\alpha \in$ ()

- A. $(0, \frac{\pi}{6})$ B. $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ C. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ D. $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

8. 已知 e 是自然对数的底数, π 是圆周率, 下列不等式中, $\pi^3 < 3^\pi$, $3^e < e^3$, $\pi^e < e^\pi$, 正确的个数为()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 设 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$, 点 P 是线段 AB 上的一个动点, $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, 若 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} \geq \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$, 则实数 λ 的值可以为()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

10. 若 $a < b < 0$, 则下列不等式恒成立的是()

- A. $\frac{1}{a-b} < \frac{1}{a}$ B. $\frac{1}{|a|} > \frac{1}{|b|}$ C. $(a + \frac{1}{b})^2 > (b + \frac{1}{a})^2$ D. $(a + \frac{1}{a})^2 > (b + \frac{1}{b})^2$

11. 若直线 $y=2a$ 与函数 $y=|a^x-1| (a>0, \text{且 } a \neq 1)$ 的图象有两个公共点, 则 a 的取值可以是()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

12. 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 下列恒等式正确的为()

- A. $C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^{n-1}$ B. $1C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$

- C. $1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \cdots + n^2 C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$ D. $1^3 C_n^1 + 2^3 C_n^2 + \cdots + n^3 C_n^n = (4n-3)2^{n-1}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ，前 n 项和 S_n 满足条件 $\frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{4n+2}{n+1}, n=1, 2, \dots$ ，则

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_{2021}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

14. 直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{2}$ 与圆 $D: (x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 3$ 交与 A, B 两点，则直线 AD 与 BD 的倾斜角之和为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 若函数 $f(x) = a(x-1)^3 + \frac{b}{x-1} + x - 1$ 存在 $\lambda (\lambda \in \mathbb{N}^*)$ 个零点，则所有这些零点的和等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 在锐角三角形 ABC 中， $A = B - \frac{\pi}{3}$ ， $\frac{BC}{AC} \in (\lambda, \mu)$ ，则 $\mu - \lambda$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 已知 $\triangle ABC$ 中， D 是 AC 边的中点，且① $BA=3$ ，② $BC=\sqrt{7}$ ，③ $BD=\sqrt{7}$ ，④ $\angle A=60^\circ$.

问：

(1) AC 的长为多少？

(2) $\triangle ABD$ 的角 A 的平分线 AE 的长为多少？

上面问题的条件有多余，现请你在①，②，③，④中删去一个，并将剩下的三个作为条件解答这个问题，要求答案存在且唯一.

请问你删去的是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，写出你的解答过程.

18.某校为了解学生在新冠病毒疫情期间学生自制力，学校随机抽取 80 位学生，请他们家长(每位学生请一位家长)对学生打分，满分为 10 分．下表是家长所打分数 X 的频数统计．

分数 X	5	6	7	8	9	10
频数	4	8	20	24	16	8

(1) 求家长所打分数的平均值；

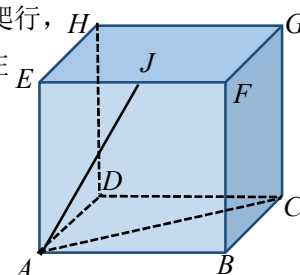
(2) 若分数不小于 8 分为“自制力强”，否则为“自制力一般”，在抽取的 80 位学生中，男同学共 42 人，其中打分为“自制力强”的男同学为 18 人，是否有 99.5%的把握认为“自制力强”与性别有关？

$$\text{附： } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.01	0.005
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879

19.如图所示，设正方体 $ABCD-EFGH$ 的棱长为 1, J 是棱 EF 的中点，一只蚂蚁从 A 点出发，沿该正方体的表面直线型爬行一圈，蚂蚁首先爬到点 J ，然后在上底面 $EFGH$ 爬行，再在右侧面爬行到点 C ，最后沿 CA 回到起点 A ，蚂蚁爬行一圈的封闭路径正好在平面 Ω 内．

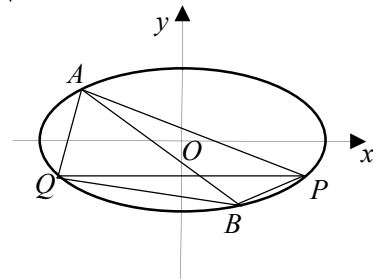
- (1) 求证：蚂蚁在上底面 $EFGH$ 上爬行的路线 l 与 AC 平行；
- (2) 求平面 Ω 与平面 $ABCD$ 所成的锐二面角的余弦值．



20. 如图所示, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且过点 $P(2, -1)$,

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 Q 在椭圆 C 上, 且 PQ 与 x 轴平行, 过 P 作两条直线分别交椭圆 C 于两点 A, B , 直线 PQ 平分 $\angle APB$, 且直线 AB 过点 $R(-1, 0)$, 求四边形 $PAQB$ 的面积.



21. 对任意正整数 m, n , 定义函数 $f(m, n)$ 如下:

① $f(1, 1) = 1$;

② $f(m+1, n) = f(m, n) + 2(m+n)$;

③ $f(m, n+1) = f(m, n) + 2(m+n-1)$.

(1) 求 $f(m, 1)$ 的解析式;

(2) 设 e 是自然对数的底数, $n \in \mathbb{N}^*$, $g(n) = \frac{\sqrt{f(n, n)}}{e^{n-1}}$, 试比较 $g(n)$ 与 $\frac{e}{n}$ 的大小.

22. 设 $M(m,n)$ 为定点, A 是抛物线 $C: y=x^2$ 上的一点, 若抛物线在 A 处的切线恰好与 A,M 两点的连线互相垂直, 则称点 A 为点 M 的“ f 伴点”.

(1) 求抛物线 C 的焦点 F 的“ f 伴点”;

(2) 设 $m>0$, 问: 当且仅当 m,n 满足什么条件时, 点 M 有三个“ f 伴点”? 试证明你的结论.