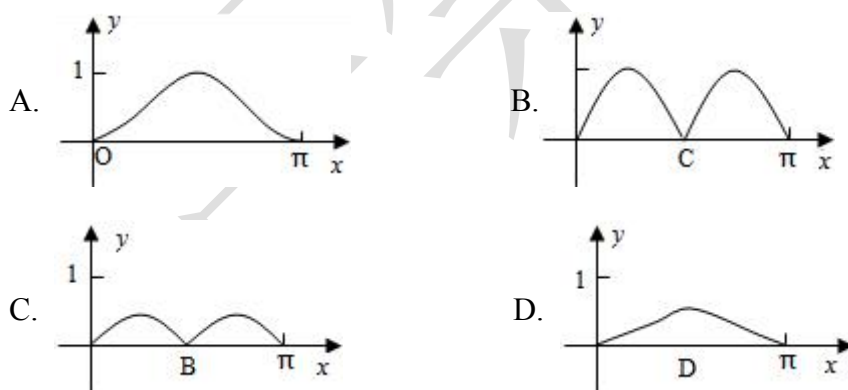
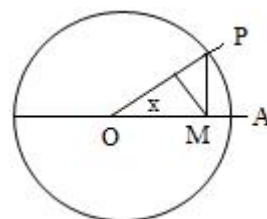


江苏省仪征中学高一数学期末模拟试卷 4

一、选择题（本大题共 8 小题，共 40.0 分）

1. 设集合 $A=\{x|y=\lg(x-3)\}$, $B=\{y|y=2^x, x\in R\}$, 则 $A\cup B$ 等于 ()
A. $\emptyset$ B. R C. $\{x|x>1\}$ D. $\{x|x>0\}$
2. 已知函数 $y=f(x)$ 定义域是 $[-2, 3]$, 则 $y=f(2x-1)$ 的定义域是 ()
A. $[0, \frac{5}{2}]$ B. $[-1, 4]$ C. $[-\frac{1}{2}, 2]$ D. $[-5, 5]$
3. 设 $f(x)=ax^2+bx+2$ 是定义在 $[1+a, 1]$ 上的偶函数, 则 $a+2b=$ ()
A. 0 B. 2 C. -2 D. $\frac{1}{2}$
4. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & (x\leq 1) \\ x^2+x-2 & (x>1) \end{cases}$, 则 $f(\frac{1}{f(2)})$ 的值为 ()
A. $\frac{15}{16}$ B. $-\frac{27}{16}$ C. $\frac{8}{9}$ D. 18
5. 非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=\sqrt{3}|\vec{b}|$, 且 $(\vec{a}-\vec{b})\perp(\vec{a}-3\vec{b})$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的大小为 ()
A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
6. 已知 $2^a=5^b=\sqrt{10}$, 则 $\frac{a+b}{ab}=$ ()
A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2
7. 如图, 圆 O 的半径为 1, A 是圆上的定点, P 是圆上的动点, 角 x 的始边为射线 OA , 终边为射线 OP , 过点 P 做直线 OA 的垂线, 垂足为 M , 将点 M 到直线 OP 的距离表示为 x 的函数 $f(x)$, 则 $y=f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 的图象大致为 ()



8. 已知定义在 R 的函数 $y=f(x)$ 对任意的 x 满足 $f(x+1)=-f(x)$, 当 $-1\leq x<1, f(x)=x^3$. 函数 $g(x)=\begin{cases} |\log_a x|, & x>0 \\ -\frac{1}{x}, & x<0 \end{cases}$, 若函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在 $[-6, +\infty)$ 上有 6 个零点, 则实数 a 的取值范围是 ()
A. $(0, \frac{1}{7})\cup(7, +\infty)$ B. $(\frac{1}{9}, \frac{1}{7})\cup[7, 9)$
C. $[\frac{1}{9}, \frac{1}{7})\cup(7, 9]$ D. $[\frac{1}{9}, 1)\cup(1, 9]$

二、填空题（本大题共 8 小题，共 40.0 分）

9. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(\frac{x}{2}+1) = x+3$, 则 $f(3) =$ _____.

10. 函数 $y = (\frac{1}{3})^{x^2-1}$ 的值域是_____.

11. 设角 $\alpha = -\frac{35}{6}\pi$, 则 $\frac{2\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)-\cos(\pi+\alpha)}{1+\sin^2\alpha+\sin(\pi-\alpha)-\cos^2(\pi+\alpha)}$ 的值等于_____.

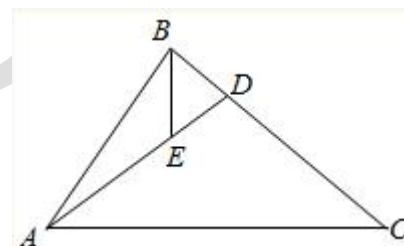
12. 计算 $\log_{2.5} 6.25 + \ln\sqrt{e} - (0.064)^{-\frac{1}{3}} + 2^{\frac{\log_1\sqrt{3}}{2}} =$ _____.

13. 已知向量 $\vec{a} = (6, -2)$, $\vec{b} = (1, m)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{a} - 2\vec{b}| =$ _____.

14. 设 $\alpha \in (0, \pi)$, $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 且 $\sin(\alpha+\beta) = \frac{5}{13}$, $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, 则 $\cos\beta$ 的值为_____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & 0 < x \leq 2, \\ -x + 3, & x > 2, \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - m$ ($m \in R$) 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 则 $(x_1 x_2 + 1)^m - x_3$ 的取值范围是_____.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $|\vec{AB}| = 2$, $|\vec{AC}| = 3$, 点 D 为边 BC 上一点, 满足 $\vec{AC} + 2\vec{AB} = 3\vec{AD}$, 点 E 是 AD 上一点, 满足 $\vec{AE} = 2\vec{ED}$, 则 $|\vec{BE}| =$ _____.



三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70.0 分)

17. (本小题满分 10 分) 已知全集 $U = R$, 集合 $A = \{x | -1 < x < 5\}$, $B = \{x | 2 < x < 8\}$.

(1) 求 $A \cap (\complement_U B)$ 和 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$;

(2) 若集合 $C = \{x | a+1 \leq x \leq 2a-2\}$, 且 $(\complement_U A) \cap C = \{x | 6 \leq x \leq b\}$, 求 $a+b$ 的值.

18. (本小题满分 12 分) 已知 $\vec{a} = (\sin x, \cos x)$, $\vec{b} = (\sin x, \sin x)$, 函数 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

(1) 求 $f(x)$ 的对称轴方程;

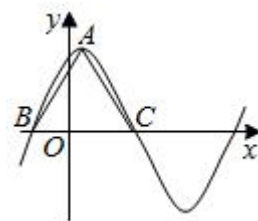
(2) 求使 $f(x) \geq 1$ 成立的 x 的取值集合;

(3) 若对任意实数 $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{24}]$, 不等式 $f(x) - m < 2$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分) 函数 $f(x) = 6\cos^2 \frac{\omega x}{2} + \sqrt{3}\sin \omega x - 3$ ($\omega > 0$) 在一个周期内的图象如图所示, A 为图象的最高点, B 、 C 为图象与 x 轴的交点, 且 $\triangle ABC$ 为正三角形.

(1) 求 ω 的值及函数 $f(x)$ 的值域;

(2) 若 $f(x_0) = \frac{8\sqrt{3}}{5}$, 且 $x_0 \in (-\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$, 求 $f(x_0+1)$ 的值.



20. (本小题满分 12 分) 某企业为打入国际市场, 决定从 A, B 两种产品中只选择一种进行投资生产. 已知投资生产这两种产品的有关数据如下表: (单位: 万美元)

项目类别	年固定成本	每件产品成本	每件产品销售价	每年最多可生产的件数
A 产品	20	m	10	200
B 产品	40	8	18	120

其中年固定成本与年生产的件数无关, m 为待定常数, 其值由生产 A 产品的原材料价格决定, 预计 $m \in [6, 8]$. 另外, 年销售 x 件 B 产品时需上交 $0.05x^2$ 万美元的特别关税. 假设生产出来的产品都能在当年销售出去.

(1) 写出该厂分别投资生产 A, B 两种产品的年利润 y_1, y_2 与生产相应产品的件数 x 之间的函数关系, 并指明其定义域;

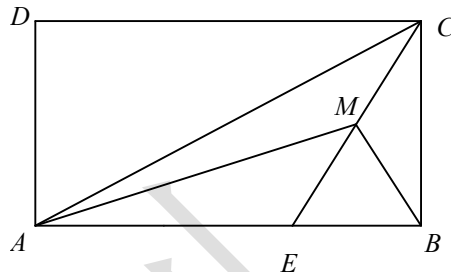
(2) 如何投资才可获得最大年利润? 请你做出规划.

21. (本小题满分 12 分)

如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AB 上, 且 $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB}$. M 是线段 CE 上一动点.

(1) 若 M 是线段 CE 的中点, $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AD}$, 求 $m+n$ 的值;

(2) 若 $AB=9$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE} = 43$, 求 $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC}$ 的最小值.



(第 21 题图)

22. (本小题满分 12 分)

对于函数 $f(x)$, 若在定义域内存在实数 x , 满足 $f(-x) = -f(x)$, 则称为“局部奇函数”

(1) 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + 2x - 4a (a \in \mathbb{R})$, 试判断 $f(x)$ 是否为“局部奇函数”, 并说明理由;

(2) 若 $f(x) = 2^x + m$ 是定义在区间 $[-1, 1]$ 上的“局部奇函数”, 求实数 m 的取值范围;

(3) 若 $f(x) = 4^x - m \cdot 2^{x+1} + m^2 - 3$ 为定义域为 $\mathbb{R}$ 上的“局部奇函数”, 求实数 m 的取值范围;

答案和解析

1. 【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查了求函数的定义域和值域, 也考查了并集的运算问题, 涉及指数函数的性质, 是基础题.

求定义域得集合 A, 求值域得集合 B, 根据并集的定义写出 $A \cup B$.

【解答】

解: 集合 $A = \{x | y = \lg(x-3)\} = \{x | x-3 > 0\} = \{x | x > 3\}$,

$B = \{y | y = 2^x, x \in \mathbb{R}\} = \{y | y > 0\}$,

则 $A \cup B = \{x | x > 0\}$.

故选 D.

2. 【答案】C

【解析】

解: $\because$ 函数 $y=f(x)$ 定义域是 $[-2, 3]$,

$\therefore$ 由 $-2 \leq 2x-1 \leq 3$,

解得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$,

即函数的定义域为 $[-\frac{1}{2}, 2]$,

故选: C.

根据复合函数定义域之间的关系即可得到结论.

本题主要考查函数定义域的求解, 根据复合函数定义域之间的关系解不等式是解决本题的关键, 是基础题.

3. 【答案】C

【解析】

【分析】

本题主要考查函数奇偶性的应用, 根据定义建立方程关系是解决本题的关键. 根据函数奇偶

性的定义和性质进行求解即可. 比较基础.

【解答】

解: $\because f(x)=ax^2+bx+2$ 是定义在 $[1+a, 1]$ 上的偶函数,

$\therefore f(-x)=f(x)$ 且 $1+a+1=0$,

得 $a=-2$, 且 $ax^2-bx+2=ax^2+bx+2$,

则 $-b=b$, 得 $b=0$,

则 $a+2b=-2$,

故选 C.

4. 【答案】A

【解析】

解: 当 $x>1$ 时, $f(x)=x^2+x-2$, 则 $f(2)=2^2+2-2=4$,

$$\therefore \frac{1}{f(2)} = \frac{1}{4},$$

当 $x \leq 1$ 时, $f(x)=1-x^2$,

$$\therefore f\left(\frac{1}{f(2)}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

故选 A.

当 $x>1$ 时, $f(x)=x^2+x-2$; 当 $x \leq 1$ 时, $f(x)=1-x^2$, 故本题先求 $\frac{1}{f(2)}$ 的值. 再根据所得值代入相应的解析式求值.

本题考查分段复合函数求值, 根据定义域选择合适的解析式, 由内而外逐层求解. 属于考查分段函数的定义的题型.

5. 【答案】C

【解析】

解: 设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的大小为 θ , 则 $\theta \in [0, \pi]$, $\because |\vec{a}| = \sqrt{3}|\vec{b}|$, 且 $(\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} - 3\vec{b})$,

$$\therefore (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) = \vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 3\vec{b}^2 = 3|\vec{b}|^2 - 4\sqrt{3}|\vec{b}|^2 \cdot \cos\theta + 3|\vec{b}|^2 = 0, \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \theta = \frac{\pi}{6},$$

故选: C.

利用两个向量垂直的性质, 两个向量数量积的定义, 求得 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦值, 可得 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角.

本题主要考查两个向量垂直的性质, 两个向量数量积的定义, 属于基础题.

6. 【答案】D

【解析】

解: $\because 2^a = 5^b = \sqrt{10}$,

$\therefore a = \log_2 \sqrt{10}$, $b = \log_5 \sqrt{10}$,

$$\begin{aligned}\therefore \frac{a+b}{ab} &= \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \log_{\sqrt{10}} 5 + \log_{\sqrt{10}} 2 \\ &= \log_{\sqrt{10}} 10 \\ &= 2.\end{aligned}$$

故选:D.

由已知得 $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \log_{\sqrt{10}} 5 + \log_{\sqrt{10}} 2$, 由此能求出结果.

本题考查代数式的值的求法, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意对数性质的合理运用.

7. 【答案】C

【解析】

解: 在直角三角形 OMP 中, $OP=1$, $\angle POM=x$, 则 $OM=|\cos x|$,

$\therefore$ 点 M 到直线 OP 的距离表示为 x 的函数 $f(x)=OM|\sin x|$

$$=|\cos x| \cdot |\sin x| = \frac{1}{2} |\sin 2x|,$$

其周期为 $T=\frac{\pi}{2}$, 最大值为 $\frac{1}{2}$, 最小值为 0,

故选 C.

在直角三角形 OMP 中, 求出 OM, 注意长度、距离为正, 再根据直角三角形的锐角三角函数的定义即可得到 $f(x)$ 的表达式, 然后化简, 分析周期和最值, 结合图象正确选择.

本题主要考查三角函数的图象与性质, 正确表示函数的表达式是解题的关键, 同时考查二倍角公式的运用.

8.【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查函数图象的应用及函数的周期性,同时考查函数零点与方程根的关系,还考查对数函数的性质,函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在 $[-6,+\infty)$ 上有 6 个零点,即函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有 6 个交点,分析 $f(x),g(x)$ 的性质,分别作出 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象,由此求得 a 的取值范围.

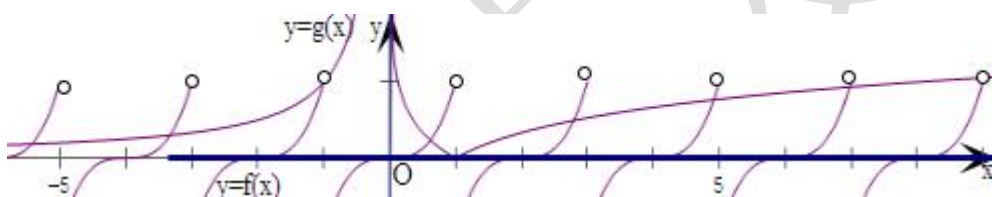
【解答】

解:∵对任意的 x 满足 $f(x+1)=-f(x)$,

∴ $f(x+2)=-f(x+1)=f(x)$,

即函数 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数,

画出函数 $f(x),g(x)$ 在 $[-6,+\infty)$ 的图象,



由图象可知:在 y 轴的左侧有 2 个交点,只要在右侧有 4 个交点即可,

$$\text{则} \begin{cases} |\log_a 7| < 1 \\ |\log_a 9| \geq 1 \end{cases} \text{ 即有 } \begin{cases} a > 7 \text{ 或 } 0 < a < \frac{1}{7} \\ 1 < a \leq 9 \text{ 或 } \frac{1}{9} \leq a < 1 \end{cases},$$

故 $7 < a \leq 9$ 或 $\frac{1}{9} \leq a < \frac{1}{7}$.

故选 C.

9.【答案】7

【解析】

解:∵函数 $f(x)$ 满足 $f(\frac{x}{2}+1)=x+3$,

令 $x=4$, 则 $f(3)=7$,

故答案为:7

由已知中函数的解析式, 令 $x=4$, 可得答案.

本题考查的知识点是函数求值, 难度不大, 属于基础题.

10. 【答案】 $(0, 3]$

【解析】

【分析】

本题考查了指数函数的性质, 复合函数的值域, 利用换元法求函数的值域, 属于基础题. 令

$t=x^2-1$, 将求函数 $y = (\frac{1}{3})^{x^2-1}$ 的值域的问题转化为求 $y = (\frac{1}{3})^t$ 在 $[-1, +\infty)$ 上的值域问题, 再利用函数 $y = (\frac{1}{3})^t$ 的单调性求值域.

【解答】

解: 令 $t=x^2-1$, $t \in [-1, +\infty)$,

即 $y = (\frac{1}{3})^t$, $t \in [-1, +\infty)$,

函数 $y = (\frac{1}{3})^t$ 在区间 $[-1, +\infty)$ 上是减函数,

故 $y \leq (\frac{1}{3})^{-1} = 3$,

故函数 $y = (\frac{1}{3})^{x^2-1}$ 的值域是 $(0, 3]$.

故答案为 $(0, 3]$.

11. 【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

解: 角 $\alpha = -\frac{35}{6}\pi$,

$$\begin{aligned} & \frac{2\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha) - \cos(\pi+\alpha)}{1+\sin^2\alpha+\sin(\pi-\alpha) - \cos^2(\pi+\alpha)} \\ &= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha}{1+\sin^2\alpha+\sin\alpha - \cos^2\alpha} \\ &= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha}{2\sin^2\alpha + \sin\alpha} \\ &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ &= \frac{\cos(-\frac{35}{6}\pi)}{\sin(-\frac{35}{6}\pi)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}}$$

$$= \sqrt{3}.$$

直接利用诱导公式化简所求表达式, 然后代入求解即可.

本题考查诱导公式的应用, 三角函数化简求值, 考查计算能力.

12. 【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】

此题直接利用指数函数和对数函数的运算性质即可求解此题.

【解答】

$$\text{解: 原式} = \log_{2.5} 2.5^2 + \ln e^{\frac{1}{2}} - ((0.4)^3)^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3}}$$

$$= 2\log_{2.5} 2.5 + \frac{1}{2} \ln e - (0.4)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} (\sqrt{3})^{-1}}$$

$$= 2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{故答案为 } \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

13. 【答案】 $4\sqrt{5}$

【解析】

【分析】

本题考查了平面向量的位置关系的判断及应用, 同时考查了向量的模的求法与应用. 由

$\vec{a} \perp \vec{b}$ 可得 $m=3$; 从而求得 $\vec{a} - 2\vec{b} = (4, -8)$; 从而求模.

【解答】

$$\text{解: } \because \boxed{\times} \text{ 且 } \vec{a} \perp \vec{b},$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 6 - 2m = 0,$$

$$\therefore m = 3;$$

$$\therefore \vec{a} - 2\vec{b} = (6, -2) - (2, 6) = (4, -8);$$

$$\therefore \boxed{\times},$$

故答案为 $\boxed{\times}$.

14. 【答案】 $-\frac{16}{65}$

【解析】

$$\text{解:} \because \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{3} > 1,$$

$$\therefore \alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\therefore \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13} < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \alpha + \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right),$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = -\frac{12}{13},$$

$$\text{则 } \cos \beta = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha] = \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha = -\frac{12}{13} \times \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} = -\frac{16}{65}.$$

$$\text{故答案为: } -\frac{16}{65}$$

由 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 的值, 利用二倍角的正切函数公式求出 $\tan \alpha$ 的值大于 1, 确定出 α 的范围, 进而 $\sin \alpha$ 与 $\cos \alpha$ 的值, 再由 $\sin(\alpha + \beta)$ 的值范围求出 $\alpha + \beta$ 的范围, 利用同角三角函数间的基本关系求出 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值, 所求式子的角 $\beta = \alpha + \beta - \alpha$, 利用两角和与差的余弦函数公式化简后, 将各自的值代入计算即可求出值.

此考查了二倍角的正切函数公式, 同角三角函数间的基本关系, 以及两角和与差的余弦函数公式, 熟练掌握公式是解本题的关键.

15. 【答案】 $(-2, 0)$

【解析】

【分析】

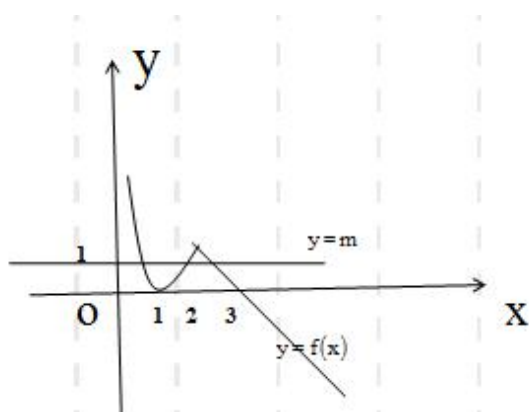
本题考查了函数图象的应用, 对数与对数运算, 函数的零点与方程根的关系和数形结合思想.

利用函数与方程思想把函数的零点问题转化为函数图象交点问题, 利用对数运算, 数形结合计算得结论.

【解答】

解: 若函数 $g(x)=f(x)-m$ ($m \in R$) 有三个不同的零点,

则函数 $f(x)$ 图象与直线 $y=m$ 有三个不同交点, 如图:



结合图象可知 $0 < m < 1, 2 < x_3 < 3$,

且 $\log_2 x_1 = -\log_2 x_2$, 即 $\log_2 x_1 + \log_2 x_2 = 0$,

所以 $x_1 x_2 = 1, 1 < (x_1 x_2 + 1)^m < 2$

又 $2 < x_3 < 3, -3 < x_3 < -2$

所以 $-2 < (x_1 x_2 + 1)^m - x_3 < 0$.

故答案为 $(-2, 0)$.

16. 【答案】 $\frac{2\sqrt{19}}{9}$

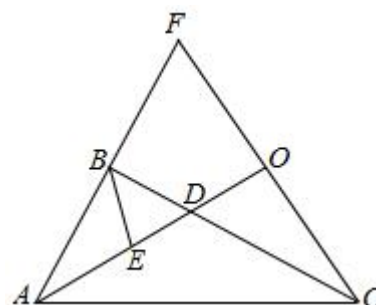
【解析】

解: 如图, 延长 AB 到 F, 使 $AF=2AB$, 连接 CF,

取 CF 中点 O, 连接 AO, 则 $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AO} = 3\overrightarrow{AD}$,

$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB})$,

$\therefore \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{ED}$,



$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} = \frac{4}{9} \overrightarrow{AO} = \frac{2}{9} (\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}) = \frac{4}{9} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{9} \overrightarrow{AC};$$

$$\because \angle BAC = \frac{\pi}{3}, \therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 3 \times \cos 60^\circ = 3,$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{5}{9} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{9} \overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{BE}^2 = \left(-\frac{5}{9} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{9} \overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{25}{81} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{4}{81} \overrightarrow{AC}^2 - \frac{20}{81} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{76}{81},$$

$$\therefore |\overrightarrow{BE}| = \sqrt{\frac{76}{81}} = \frac{2\sqrt{19}}{9}.$$

故答案为: $\frac{2\sqrt{19}}{9}$.

用 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 表示出 $\overrightarrow{BE}$, 计算 $\overrightarrow{BE}^2$ 即可得出 $|\overrightarrow{BE}|$.

本题考查了平面向量的数量积运算, 平面向量的几何运算, 属于中档题.

17. 【答案】解: (1) 全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x | -1 < x < 5\}$, $B = \{x | 2 < x < 8\}$,

$$\therefore \complement_U B = \{x | x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 8\},$$

$$\therefore A \cap (\complement_U B) = \{x | -1 < x \leq 2\};$$

$$\text{又 } A \cup B = \{x | -1 < x < 8\},$$

$$\therefore (\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \complement_U (A \cup B) = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 8\};$$

$$(2) \because \complement_U A = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 5\},$$

$$\text{集合 } C = \{x | a+1 \leq x \leq 2a-2\}, \text{ 且 } (\complement_U A) \cap C = \{x | 6 \leq x \leq b\},$$

$$\therefore a+1=6, \text{ 且 } b=2a-2;$$

$$\text{解得 } a=5, b=8;$$

$$\therefore a+b=13.$$

【解析】

(1) 根据补集, 交集和并集的定义计算即可;

(2) 由交集与补集的定义, 得出 a, b 的值, 再计算 $a+b$.

本题考查了集合的定义与运算问题, 是基础题目.

$$18. 【答案】解: (I) f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \sin 2x \cdots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2} \cdots (2 \text{ 分})$$

$$\text{令 } 2x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \text{ 解得 } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\therefore f(x) \text{ 的对称轴方程为 } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}. \cdots (4 \text{ 分})$$

$$(II) \text{ 由 } f(x) \geq 1 \text{ 得 } \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2} \geq 1, \text{ 即 } \sin(2x - \frac{\pi}{4}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdots (5 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

故 x 的取值集合为 $\{x | \frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$. $\cdots$ (7 分)

$$(III) \because x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{24}], \therefore \frac{\pi}{12} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{3} \cdots (8 \text{ 分})$$

又 $y = \sin x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上是增函数, $\therefore \sin \frac{\pi}{12} \leq \sin(2x - \frac{\pi}{4}) \leq \sin \frac{\pi}{3} \cdots (9 \text{ 分})$

$\therefore f(x)$ 在 $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{24}]$ 时的最大值是 $f(x)_{\max} = \frac{\sqrt{6}+2}{4} \cdots (10 \text{ 分})$

$\therefore f(x) - m < 2$ 恒成立,

$$\therefore m > f(x)_{\max} - 2, \text{ 即 } m > \frac{\sqrt{6}-6}{4} \cdots (11 \text{ 分})$$

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $(\frac{\sqrt{6}-6}{4}, +\infty)$. $\cdots$ (12 分)

【解析】

(I) 利用向量的数量积运算、二倍角的公式, 两角差的正弦公式化简解析式, 由正弦函数的对称轴和整体思想求出 $f(x)$ 的对称轴方程;

(II) 由 (I) 化简 $f(x) \geq 1$, 由正弦函数的图象与性质列出不等式, 求出不等式的解集;

(III) 由 x 的范围求出 $2x - \frac{\pi}{4}$ 的范围, 利用正弦函数的性质求出 $f(x)$ 的最大值, 根据条件和恒成立问题列出不等式, 求出实数 m 的取值范围.

本题考查正弦函数的图象与性质, 三角恒等变换中的公式, 向量数量积的运算, 以及恒成立问题的转化, 考查转化思想, 数形结合思想, 化简、变形能力.

19. 【答案】解: (I) 由已知可得, $f(x) = 3\cos\omega x + \sqrt{3}\sin\omega x = 2\sqrt{3}\sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$,

又正三角形 ABC 的高为 $2\sqrt{3}$, 从而 $BC=4$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的周期 $T=4 \times 2=8$, 即 $\frac{2\pi}{\omega}=8$, $\omega=\frac{\pi}{4}$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域为 $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$.

$$(II) \because f(x_0) = \frac{8\sqrt{3}}{5}, \text{ 由 (I) 有 } f(x_0) = 2\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{4}x_0 + \frac{\pi}{3}) = \frac{8\sqrt{3}}{5},$$

即 $\sin(\frac{\pi}{4}x_0 + \frac{\pi}{3}) = \frac{4}{5}$, 由 $x_0 \in (-\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$, 知 $\frac{\pi}{4}x_0 + \frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

$$\therefore \cos(\frac{\pi}{4}x_0 + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2} = \frac{3}{5}.$$

$$\therefore f(x_0+1) = 2\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{4}x_0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) = 2\sqrt{3}\sin[\frac{\pi}{4}x_0 + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}] = 2\sqrt{3}[\sin(\frac{\pi}{4}x_0 + \frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{4} + \cos(\frac{\pi}{4}x_0 + \frac{\pi}{3})\sin\frac{\pi}{4}]$$

$$=2\sqrt{3} \left(\frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \frac{7\sqrt{6}}{5}.$$

【解析】

(I) 将 $f(x)$ 化简为 $f(x)=2\sqrt{3}\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$, 利用正弦函数的周期公式与性质可求 ω 的值及函数 $f(x)$ 的值域;

(II) 由 $x_0 \in (-\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$, 知 $\frac{\pi}{4}x_0 + \frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 由 $f(x_0) = \frac{8\sqrt{3}}{5}$, 可求得即 $\sin(\frac{\pi}{4}x_0 + \frac{\pi}{3}) = \frac{4}{5}$, 利用两角和的正弦公式即可求得 $f(x_0+1)$.

本题考查由 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象确定其解析式, 着重考查三角函数的化简求值与正弦函数的性质, 考查分析转化与运算能力, 属于中档题.

20. 【答案】解: (1) 设年销售量为 x 件, 按利润的计算公式, 则生产 A, B 两产品的年利润分别为 y_1, y_2 ,

则 $y_1=10x-(20+mx)=(10-m)x-20, 0 < x \leq 200$, 且 $x \in N$,

$y_2=18x-(8x+40)-0.05x^2=-0.05x^2+10x-40$,

$\therefore y_2=-0.05(x-100)^2+460, 0 < x \leq 120$ 且 $x \in N$,

(2) $\because 6 \leq m \leq 8$,

$\therefore 10-m > 0$,

$\therefore y_1=(10-m)x-20$ 为增函数,

又 $0 \leq x \leq 200, x \in N$,

$\therefore x=200$ 时, 生产 A 产品有最大利润 $(10-m) \times 200 - 20 = 1980 - 200m$ (万美元),

又 $y_2=-0.05(x-100)^2+460, 0 < x \leq 120, x \in N$,

$\therefore x=100$ 时, 生产 B 产品有最大利润 460 (万美元),

作差比较:

$(y_1)_{\max} - (y_2)_{\max} = 1980 - 200m - 460 = 1520 - 200m$,

令 $1520 - 200m = 0$, 得 $m = 7.6$,

所以, 当 $6 \leq m < 7.6$ 时, 投资 A 产品 200 件可获得最大年利润;

当 $m = 7.6$ 时, 生产 A 产品与生产 B 产品均可获得最大年利润;

当 $7.6 < m \leq 8$ 投资 B 产品 100 件可获得最大利润.

【解析】

本题考查函数最值的应用, 把实际问题转化为抽象函数模型的能力, 并能根据模型的解决, 指导实际生活中的决策问题.

(1) 利润=年销售收入-固定成本-产品成本-特别关税, 可求得该厂分别投资生产 A、B 两种产品的年利润 y_1 , y_2 与生产相应产品的件数 x 之间的函数关系和定义域;

(2) 作差法比较年利润 y_1 , y_2 的大小, 再确定相关规划.

21. 【答案】解 (1) 因为 M 是线段 CE 的中点, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB}$,

$$\begin{aligned}\text{所以 } \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}) = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AD},\end{aligned}$$

因为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 不共线,

$$\text{所以 } m = \frac{5}{6}, n = \frac{1}{2}, \text{ 则 } m + n = \frac{4}{3}. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(2) 在矩形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,

$$\begin{aligned}\text{所以 } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE} &= (-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) \cdot (-\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2 \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2.\end{aligned}$$

$$\text{因为 } AB=9, \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE}=43, \text{ 所以 } \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{3} \times 9^2 + \overrightarrow{AD}^2 = 43,$$

解得 $|\overrightarrow{AD}| = 4$, 即 $AD = BC = 4$.

在 $\text{Rt}\triangle EBC$ 中, $EB = 3$, $BC = 4$, 则 $EC = 5$. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}

因为 $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB}$,

$$\begin{aligned}\text{所以 } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA}) + 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB}) = 3\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} \\ &= 3\overrightarrow{ME}.\end{aligned} \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

设 $ME = t$, $0 \leq t \leq 5$.

$$\text{所以 } (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MC} = -3t \cdot (5-t) = 3(t^2 - 5t) = 3(t - \frac{5}{2})^2 - \frac{75}{4}, \quad 0 \leq t \leq 5.$$

因此当且仅当 $t = \frac{5}{2}$ 时, $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC}$ 有最小值 $-\frac{75}{4}$,

从而 $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC}$ 的最小值为 $-\frac{75}{4}$. \dots\dots\dots 16 \text{ 分}

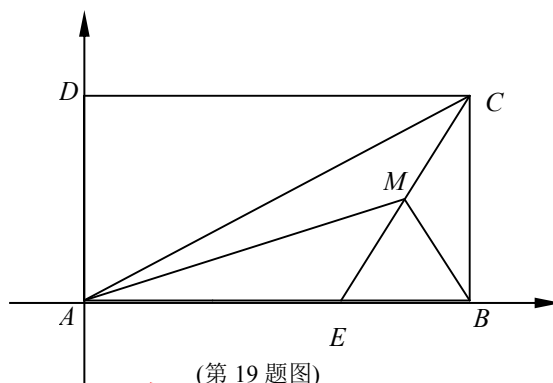
解法二: 建立如图直角坐标系, 则 $A(0, 0)$,
 $E(6, 0)$, $B(9, 0)$, 设 $C(9, m)$, $m > 0$.
 则 $\overrightarrow{CA} = (-9, -m)$, $\overrightarrow{CE} = (-3, -m)$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE} &= 27 + m^2 = 43, \text{ 所以 } m = 4 \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分} \\ \text{所以 } C(9, 4), \text{ 因为 } M \text{ 在线段 } CE \text{ 上,}\end{aligned}$$

设 $\overrightarrow{CM} = \lambda \overrightarrow{CE}$, $0 \leq \lambda \leq 1$. $M(x, y)$, 则 $\overrightarrow{CM} = (x-9, y-4)$, $\overrightarrow{CE} = (-3, -4)$,
 $x-9 = -3\lambda$, $y-4 = -4\lambda$, 所以 $x = 9-3\lambda$, $y = 4-4\lambda$. 即 $M(9-3\lambda, 4-4\lambda)$ \dots\dots\dots 5 \text{ 分}

$$\text{所以 } \overrightarrow{MA} = (3\lambda-9, 4\lambda-4), \overrightarrow{MB} = (3\lambda, 4\lambda-4)$$

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = (9\lambda-9, 12\lambda-12), \overrightarrow{MC} = (3\lambda, 4\lambda),$$



(第 19 题图)

$$\begin{aligned}
 (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC} &= 27\lambda^2 - 27\lambda + 48\lambda^2 - 48\lambda = 75(\lambda^2 - \lambda) \\
 &= 75(\lambda - \frac{1}{2})^2 - \frac{75}{4}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.
 \end{aligned}$$

.....8 分

所以当且仅当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC}$ 有最小值 $-\frac{75}{4}$,

从而 $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC}$ 的最小值为 $-\frac{75}{4}$

9 分

注: 第(1)问 7 分, 将 $\overrightarrow{AM}$ 用 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 线性表示, 得 4 分, 指出 m, n 并求出 $m+n$ 的值 3 分, 不交代 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 不共线, 扣 1 分;

第(2)问 9 分, 求出 AD 的长得 3 分, 求出 EC 的长得 1 分, 得出 $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{ME}$ 得 2 分,

列出 $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC}$ 的函数关系式得 2 分, 求出最值得 1 分.

用坐标法(解法二), 求出 C 点坐标(即求出 m 值)得 3 分, 得出 M 点坐标得 2 分,

列出函数关系式得 3 分, 求出最值得 1 分.

22. 【答案】解: (1) 因为 $f(-x) + f(x) = 2ax^2 - 8a = 2a(x-2)(x+2)$,

所以当 $x=2$ 或 $x=-2$ 时, $f(-x) + f(x) = 0$ 即 $f(-x) = -f(x)$ 成立,

所以 $f(x)$ 是“局部奇函数”;

(2) 由题意 $f(-x) + f(x) = 2^x + 2^{-x} + 2m = 0$ 在 $[-1, 1]$ 上有解,

所以 $-2m = 2^x + 2^{-x}$,

令 $t = 2^x$, 则 $t \in [\frac{1}{2}, 2]$,

所以 $-2m = t + \frac{1}{t}$,

又函数 $y = t + \frac{1}{t}$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 单调递减, 在 $[1, 2]$ 单调递增,

所以 $y = t + \frac{1}{t} \in [2, \frac{5}{2}]$,

所以 $-2m \in [2, \frac{5}{2}]$,

即 $m \in [-\frac{5}{4}, -1]$;

(3) 由定义得 $f(-x) + f(x) = 4^x + 4^{-x} - 2m(2^x + 2^{-x}) + 2m^2 - 6 = 0$ 有解,

即 $(2^x + 2^{-x})^2 - 2m(2^x + 2^{-x}) + 2m^2 - 8 = 0$ 有解,

令 $p = 2^x + 2^{-x} \in [2, +\infty)$,

所以等价于方程 $p^2 - 2mp + 2m^2 - 8 = 0$ 在 $[2, +\infty)$ 有解,

设 $g(p)=p^2-2mp+2m^2-8$,

①若 $m \geq 2$,

则 $\Delta=4m^2-4(2m^2-8) \geq 0$, 即 $m^2 \leq 8$, 解得 $-2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$,

即 $2 \leq m \leq 2\sqrt{2}$,

②若 $m < 2$,

$$\text{则} \begin{cases} m < 2 \\ g(2) = 2m^2 - 4m - 4 \leq 0, \\ \Delta = 4m^2 - 4(2m^2 - 8) \geq 0 \end{cases}$$

解得 $1 - \sqrt{3} \leq m < 2$,

综合得 $1 - \sqrt{3} \leq m \leq 2\sqrt{2}$.

【解析】

本题考查对勾函数及指数函数和二次函数的性质.

(1)由 $f(-x)+f(x)=0$ 有解及可判断;

(2)将问题转化为 $2^x+2^{-x}+2m=0$ 在 $[-1,1]$ 上有解,然后分离参数,结合对勾函数的性质即可求解;

(3)令 $p=2^x+2^{-x} \in [2,+\infty)$,将问题转化为二次方程根的分布,讨论求解即可.