江苏省仪征中学 2018—2019 学年第二学期 期末复习讲义（5）

1．函数 $f(x)=\dfrac{\ln\left(2x-x^{2}\right)}{x-1}$ 的定义域为_______________．$(0,1)\cup(1,2)$

2．函数 $y=4\sin^2x-12\cos x-1$，$x\in[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}]$的值域为____________．

答案：[－13，8]

3．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$ (其中 $A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$)的图象与 x 轴的交点中，相邻两个交点之间的距离为$\dfrac{\pi}{2}$，且图象上一个最低点为 $M(\dfrac{2\pi}{3},-2)$，则 $f(x)$的解析式为_________．

答案：$f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$

4．已知函数 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})(0\le x<\pi)$，且 $f(\alpha)=f(\beta)=\dfrac{1}{2}(\alpha\ne\beta)$，则$\alpha+\beta=$____

答案：$\dfrac{7\pi}{6}$

5．过点 $P(1，0)$作圆 C：$(x-4)^2+(y-2)^2=9$ 的两条切线，切点分别为 A、B，则切线方程为___________；　　切线长 PA 为______________；直线 AB 的方程为__________.

答案：$x=1$ 或 $5x+12y-5=0$；2；$3x+2y-7=0$．

6．直线 l_1：$y=kx+3$ 与圆 C：$(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 相交于 M，N 两点，若 $MN\geqslant 2\sqrt{3}$，则 k 的的取值范围是_________．

答案：$[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}]$

7．设 $x\in(0,\pi)$，则函数 $y=\dfrac{\sin x}{2}+\dfrac{2}{\sin x}$ 的最小值为____________.答案：$\dfrac{5}{2}$

8．设点 P 是曲线 $y=\ln x$ 图象上任意一点，则点 P 到直线 $y=x$ 的最短距离是________ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

9．已知过原点的动直线 l 与圆 $C_1: x^2+y^2-6x+5=0$ 相交于不同的两点 A，B，则线段 AB 的中点 M 的轨迹 C 的方程为______________.

答案：$(x-\dfrac{3}{2})^2+y^2=\dfrac{9}{4}$ $(\dfrac{5}{3}<x\le 3)$.

10．已知 $f(x)=xe^{x}$，$g(x)=-(x+1)^2+a$，若 $\exists x_1,x_2\in R$，使得 $f(x_1)\le g(x_2)$ 成立，则 a 的取值范围是_______ $[-\dfrac{1}{e},+\infty)$

11.在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 O：$x^2+y^2=1$，O_1：$(x-4)^2+y^2=4$，动点 P 在直线 $x+\sqrt{3}y-b=0$ 上，过 P 分别作圆 O，O_1 的切线，切点分别为 A，B，若满足 $PB=2PA$ 的点 P 有且只有一个，则实数 b 的值是________.

答案：$-\dfrac{20}{3}$或 4

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_4 x|, & 0<x\le 4\\ x^2-10x+25, & x>4\end{cases}$，若 a,b,c,d 是互不相同的正数，且

$f(a)=f(b)=f(c)=f(d)$，则 $abcd$ 的取值范围是__________（24，25）

13.已知α，$\beta\in(0，\pi)$，且 $\tan\alpha=2$，$\cos\beta=-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

（1）求 $\cos2\alpha$的值；（2）求 $2\alpha-\beta$的值.

解析：$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{2-\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}$，

因为 $\tan\alpha=2$，所以 $\cos2\alpha=-\dfrac{3}{5}$.

（2）因为$\alpha\in$（0，π），且 $\tan\alpha=2$，所以$\alpha\in(0，\dfrac{\pi}{2})$

又 $\cos2\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\therefore 2\alpha\in(\dfrac{\pi}{2}，\pi)$，$\sin2\alpha=\dfrac{4}{5}$，

因为$\beta\in$（0，π），$\cos\beta=-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

所以 $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，$\beta\in(\dfrac{\pi}{2}，\pi)$，

所以 $\sin(2\alpha-\beta)=\sin2\alpha\cos\beta-\cos2\alpha\sin\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

又 $2\alpha-\beta\in(-\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{\pi}{2})$，

$\therefore 2\alpha-\beta=-\dfrac{\pi}{4}$.

14. 设 a∈R，命题 p：∃x∈[1，2]，满足（a－1）x－1＞0．命题 q：∀x∈R，$x^2+ax+1>0$，

（1）若命题 p∧q 是真命题，求 a 的范围；

（2）（¬p）∧q 为假，（¬p）∨q 为真，求 a 的取值范围．

解：（1）p 真，则 $\begin{cases}a-1>0\\2(a-1)-1>0\end{cases}$或$\begin{cases}a-1<0\\1\cdot(a-1)-1>0\end{cases}$得 $a>\dfrac{3}{2}$；………2 分

q 真，则 $a^2-4<0$，得－2＜a＜2，………4 分

∴p∧q 真，$\dfrac{3}{2}<a<2$．………7 分

（2）由（¬p）∧q 为假，（¬p）∨q 为真⇒p、q 同时为假或同时为真，

若 p 假 q 假，则$\begin{cases} a\leqslant \frac{3}{2} \\ a\leqslant -1或a\geqslant 2 \end{cases}$，⇒a≤－2，　　　　　　　　………10 分

若 p 真 q 真，则$\begin{cases} a>\frac{3}{2} \\ -2<a<2 \end{cases}$，⇒$\frac{3}{2}<a<2$　　　　　　　　………13 分

综上 a≤－2 或$\frac{3}{2}<a<2$.　　　　　　　　………14 分

15.已知函数$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\sqrt{3}\cos^2 x$.

(I)求$f(x)$的最小周期和最小值，

(II)将函数$f(x)$的图像上每一点的横坐标伸长到原来的两倍，纵坐标不变，得到函数$g(x)$的图像.当$x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$时，求$g(x)$的值域.

答案：(I) $f(x)$的最小正周期为π，最小值为$-\frac{2+\sqrt{3}}{2}$，(II) $[\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{2-\sqrt{3}}{2}]$.

解析：(1) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\sqrt{3}\cos^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\cos 2x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$

因此$f(x)$的最小正周期为π，最小值为$-\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

(2)由条件可知：$g(x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

当$x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$时，有$x-\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$,

从而$\sin(x-\frac{\pi}{3})$的值域为$[\frac{1}{2},1]$，

那么$\sin(x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$的值域为$[\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{2-\sqrt{3}}{2}]$.

故$g(x)$在区间$[\frac{\pi}{2},\pi]$上的值域是$[\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{2-\sqrt{3}}{2}]$.

16.已知以点C为圆心的圆经过点$A(-1,0)$和$B(3,4)$,且圆心在直线$x+3y-15=0$上.

（1）求圆C的方程；

（2）设点P在圆C上，求$\triangle PAB$的面积的最大值.

【解析】（1）依题意知所求圆的圆心C为线段AB的垂直平分线和直线$x+3y-15=0$的交点，

∵线段AB的中点为$(1,2)$，直线AB的斜率为$\frac{4-0}{3-(-1)}=1$，

∴线段AB的垂直平分线的方程为$y-2=-(x-1)$，即$x+y-3=0$.（3分）

联立方程得$\begin{cases}x+y-3=0\\x+3y-15=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-3\\y=6\end{cases}$，即圆心$C(-3,6)$，半径$r=|CA|=\sqrt{(-3+1)^2+6^2}=$

$2\sqrt{10}$，

∴所求圆的方程为$(x+3)^2+(y-6)^2=40$.（6分）

（2）由题意及（1）得$|AB|=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，圆心$C(-3,6)$到直线$AB:x-y+1=0$的距离为

$d=\frac{|-3-6+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\sqrt{2}$，（8分）

因为点P到AB距离的最大值为$d+r=4\sqrt{2}+2\sqrt{10}$，（10分）

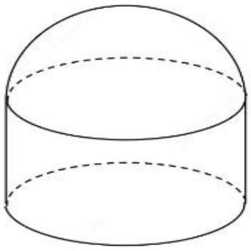
所以$\triangle PAB$面积的最大值为$\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times(4\sqrt{2}+2\sqrt{10})=16+8\sqrt{5}$.（12分）

17. 某市度假村有一特色星空酒店，该酒店由多座帐篷构成. 每一座帐篷的体积为$54\pi\ m^3$，且分上下两层，其中上层是半径为$r\ m$（$r\geq1$）的半球体，下层是半径为$r\ m$，高为$h\ m$的圆柱体（如图2）.经测算，上层半球体部分每平方米的建造费用为2千元，下方圆柱体的侧面、隔层和地面三个部分平均每平方米建造费用为3千元. 设每一座帐篷的建造总费用为y千元.

（1）求y关于的r函数解析式，并指出该函数的定义域;

（2）当半径r为何值时，一座帐篷的总建造费用 最小，并求出最小值.

（图1）



（图2）

（1）由题意，$\frac{2}{3}\pi r^3+\pi r^2 h=54\pi$，

所以 $h=\frac{54}{r^2}-\frac{2}{3}r$．

所以 $y=2\pi r^2\times 2+2\pi r^2\times 3+2\pi rh\times 3$

$=10\pi r^2+6\pi r\cdot\left(\frac{54}{r^2}-\frac{2}{3}r\right)$，

化简可得，$y=6\pi\left(r^2+\frac{54}{r}\right)$．

又因为 $h>0$，$r\geqslant 1$，解 $\frac{54}{r^2}-\frac{2}{3}r>0$，得 $1\leqslant r<3\sqrt[3]{3}$．

即函数的定义域为 $\{r\mid 1\leqslant r<3\sqrt[3]{3}\}$．

（2）设 $g(r)=r^2+\frac{54}{r}$，$1\leqslant r<3\sqrt[3]{3}$，

则 $g'(r)=2r-\frac{54}{r^2}=\frac{2(r-3)(r^2+3r+9)}{r^2}$，

令 $g'(r)=0$，得 $r=3$．

列表如下：（略）

所以当 $r=3$ 时，$g(r)$ 取得最小值，且最小值为18．

所以原函数当 $r=3$ 时，取得最小值为 162π．　　　　　　……1

答：半径 r 为3 m时，一座帐篷的总建造费用最小，且最小值为 162π 千元

18．已知函数 $f(x)=x\ln x-(k+1)x$，$k\in R$．

（1）若 $k=-1$，求 $f(x)$ 的最值；

（2）若对于任意 $x\in[e,\ e^3]$，都有 $f(x)<4\ln x$ 成立，求实数 k 的取值范围；

（3）若对于任意 $x\in[2,\ e^2]$，都有 $f(x)>-2x-k$ 成立，求整数 k 的最大值．

解（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$．

因为 $k=-1$，所以 $f(x)=x\ln x$，$f'(x)=\ln x+1$．令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{e}$

列表如下：（略）　所以，$f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{e}$，没有最大值；……………4分

（2）对于任意 $x\in[e,\ e^3]$，都有 $f(x)<4\ln x$ 成立，

等价于对于任意 $x\in[e,\ e^3]$，都有 $k+1>(1-\frac{4}{x})\ln x$ 成立，　……………………6分

令 $g(x)=(1-\frac{4}{x})\ln x$，所以 $g'(x)=\frac{x-4+4\ln x}{x^2}$．

因为 $x\in[e,\ e^3]$，所以 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $x\in[e,\ e^3]$ 时单调递增．　………8分

因为 $g(x)$ 在 $x\in[e,\ e^3]$ 时的最大值是 $g(e^3)=3-\frac{12}{e^3}$．

所以，实数 k 的取值范围是 $(2-\frac{12}{e^3},+\infty)$；　………………………………10分

（3）对于任意 $x\in[2,\ e^2]$，都有 $f(x)>-2x-k$ 成立，

即对于任意 $x\in[2,\ e^2]$，都有 $(\ln x-k-1)x>-2x-k$ 成立，

因为 $x\in[2,\ e^2]$，所以 $(\ln x-k-1)x>-2x-k$ 等价于 $k<\dfrac{x\ln x+x}{x-1}$．　………12 分

令 $h(x)=\dfrac{x\ln x+x}{x-1}$，所以 $h'(x)=\dfrac{-\ln x+x-2}{(x-1)^2}$．

令 $p(x)=-\ln x+x-2$，求得 $p'(x)=\dfrac{x-1}{x}$．

当 $x\in[2,\ e^2]$ 时所以 $p'(x)>0$，$p(x)$ 在 $x\in[2,\ e^2]$ 上单调递增．

因为 $p(3)=1-\ln3<1-\ln e=0$，$p(4)=2-2\ln2>2-2\ln e=0$，且 $p(x)$ 图像不间断，

所以 $p(x)$ 在区间 $(3,\ 4)$ 内有唯一零点，…………………………………………14 分

设唯一零点为 x_0，则 $x_0\in(3,\ 4)$，且 $p(x_0)=-\ln x_0+x_0-2=0$，即 $\ln x_0=x_0-2$．

所以，$h(x)$ 在 $[2,x_0]$ 上单调递减，在 $[x_0,\ e^2]$ 上单调递增，$h(x)$ 在 $x=x_0$ 时取到最小值 $h(x_0)$．

因为 $\ln x_0=x_0-2$，所以 $h(x_0)=\dfrac{x_0\ln x_0+x_0}{x_0-1}=x_0$，

所以整数 k 的最大值为 3．…………………………………………16 分