精准概念教学，聚焦数学抽象

——“函数的奇偶性”的教学设计与思考

◉ 江苏省苏州中学园区校　陈园园

《普通高中数学课程标准(2017年版)》提出数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算与数据分析六大数学学科核心素养. 其中，数学抽象作为数学产生和发展的思维基础，反映了数学的本质. 新课标同时指出“数学抽象的主要表现为：获得数学概念和规则，提出数学命题和模型，形成数学方法与思想，认识数学结构与体系”. 数学概念蕴含丰富的数学抽象思想，数学抽象贯穿数学概念生成的全过程. 因此，在教学实践过程中教师应立足教材，精准数学概念的教学，为发展学生的数学抽象素养提供良好的素材和机会，让核心素养在数学课堂上落地生根. 基于此，本文以《普通高中教科书·数学必修第一册》(人教A版)第三章第二节“函数的基本性质”中的“奇偶性”为内容，展开教学设计，阐释在概念教学中如何培养学生的数学抽象素养.

一、设计说明

“奇偶性”是“函数的基本性质”的第二部分，第一部分是“单调性与最大(小)值”. 本节的教学目标与函数的单调性是一脉相承的，即通过数学符号语言描述函数的图象性质并形成定义，这也是研究函数性质的一般过程与方法. 从初中阶段偏重于直观、静止和形象地研究函数上升为数形结合地研究函数，由此培养学生数学抽象与直观想象等素养. 函数奇偶性概念的形成过程围绕以下三个问题：

(一) 为什么用“数”的形式刻画函数图象的对称性；

(二) 如何用“数”的形式刻画函数图象的对称性；

(三) 应用数的形式研究函数图象的对称性.

将上述问题的探究过程概括起来即：

“具体函数 —— 图象特征(对称性)—— 数量刻画 —— 符号语言 —— 抽象定义 —— 奇偶性判定”.

二、教学过程

(一) 感知概念

问题1： 观察函数 $f(x)=x^2$ 的图象(图1)，从整体上看，图象有什么特征?

追问：再观察函数 $y=g(x)$ 的图象(图2)，从整体上看，它有什么特征?

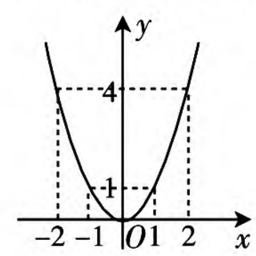

图1

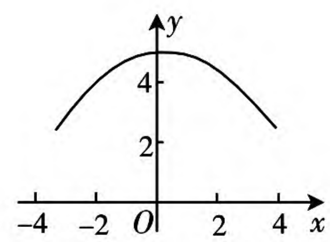

图2

设计意图： 从数学内部提出问题，引导学生观察函数 $f(x)=x^2$ 图象的整体性质 —— 对称性，是研究奇偶性的思维起点. 再利用图2中图象不关于 y 轴对称的翻折实验，造成学生的认知冲突，得到结论：仅从形的角度(图象)刻画对称性并不精确，需要从代数(函数解析式)关系角度精确地分析. 由此，学生产生要将图象特征进行“定量刻画”的想法.

(二) 建构概念

问题2： 回顾函数 $f(x)=x^2$ 的作图过程(列表、描点、连线)，结合函数值对应表思考，其图象关于 y 轴对称的几何特征如何用 $f(x)$ 满足的代数关系表示?

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$(-3)^2$	$(-2)^2$	$(-1)^2$	0	1^2	2^2	3^2

(学生在列表时已经发现 $f(-1)=f(1)$，$f(-2)=f(2)$，进而归纳出 $f(-x)=f(x)$.)

追问：x 代表哪些数?

设计意图： 从学生的认知特点出发，表格直观地体现了“数”的对称性，再引导学生对 x 的任意性进行确认，体会 $f(-x)=f(x)$ 的内涵. 从特殊到一般的思想是人们发现规律和不变性的重要方法，也是抽象数学概念的重要过程.

问题3： 一般地，如果函数 $y=f(x)$ 的图象关于 y

轴对称,那么 $f(x)$ 满足的代数关系是什么?

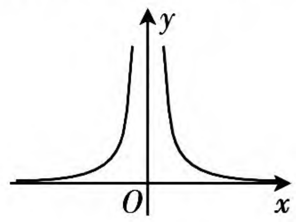

图3

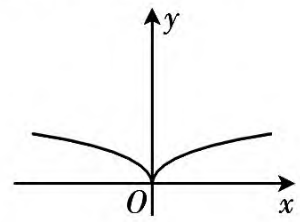

图4

设计意图:这是本节课的核心问题.构成图象的基本元素是点,学生可以将“图象的对称问题”转化为“点的对称问题”,将“点的对称问题”转化为“点的坐标的数量关系问题”,从而得到“对定义域内任意的 x,都有 $f(-x)=f(x)$”的结论.问题的提出有助于学生厘清研究函数图象的对称性的认知线索,既有对已有知识(函数的单调性)的回顾,又为今后学生学习其他函数性质(函数的周期性等)提供模板,培养学生用“数学”的方法研究数学.

【学生活动】

预设一:在函数 $y=f(x)$ 图象上任取一点 $P(x,f(x))$,那么在图象上一定存在点 $P'(-x,f(-x))$,使得 P' 与 P 关于 y 轴对称,从而两个点的坐标关系为 $f(-x)=f(x)$.

预设二:在关于 y 轴对称的函数 $y=f(x)$ 的图象上取一个点 $(x,f(x))$,则它关于 y 轴的对称点是 $(-x,f(x))$ 一定在函数图象上,即 $(-x,f(x))$ 与 $(-x,f(-x))$ 重合,所以有 $f(-x)=f(x)$.

(预设一与预设二是对点刻画函数图象的对称性的不同理解)

【阶段小结】

通过以上的问题,函数图象对称与 $f(x)$ 满足的关系的内在联系.

函数图象	$f(x)$ 满足的关系
关于 y 轴对称	对定义域中的任意 x 都有 $f(-x)=f(x)$

问题4:请给偶函数下定义

设计意图:引导学生思考,体验用符号语言定义函数性质的过程,进一步提高学生的数学抽象素养.

一般地,设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I.若对任意的 $x\in I$,都有 $-x\in I$ 且 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为偶函数(even function).

(三)深化概念

问题5:用类比的方法研究函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的图象的整体特征,并用 $f(x)$ 满足的关系表示.

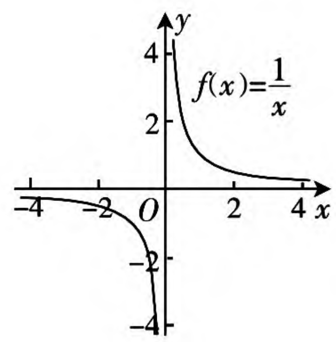

图5

函数图象	$f(x)$ 满足的关系

追问:如何理解 $f(-x)=-f(x)$.

设计意图:在给出偶函数定义的基础上,启发学生用类比的方法提出奇函数的定义,放手让学生独立地去经历发现、猜想与证明的全过程,由此建立奇函数的概念,引导学生再一次领悟这种典型的研究函数的方法,实现知识的正迁移.

问题5:请给奇函数下定义.比较奇函数、偶函数的定义,指出共同点.

设计意图:辨析奇函数与偶函数的异同,有助于学生形成共识:它们都反映了函数的整体性质,定义域关于原点对称,研究过程都体现了数形结合的思想,这为学生后续自主探究函数图象的其他对称性提供了方向和思路.

(四)应用概念

例1　(教材84页例6)判断下列函数的奇偶性:

(1)$f(x)=x^4$;　　(2)$f(x)=x^5$;

(3)$f(x)=x+\frac{1}{x}$;　　(4)$f(x)=\frac{1}{x^2}$.

设计意图:让学生掌握判断函数是否具有奇偶性的两种判断方法,体验应用数学概念解决问题的过程与步骤,体会应用数的形式研究函数图象的对称性的优越性,并强调解答题需从定义来论证,书写过程要规范.

三、教学反思

1.问题情境是数学抽象的起始点

数学概念是一种基本的数学抽象形式,数学概念的学习要从若干实例出发,归纳出共同特征,再概括到同类事物中形成一般性质.本节课采用“开门见山”的导入方式,从数学内部的实例引出问题,造成学生的认知冲突,明确引入“数”的形式去研究函数图象的对称性的必要性,有利于提高学生的思维品质和推理论证能力.

2.概括归纳是数学抽象的作用点

本节课的问题2与问题3是研究函数图象的对称性的认知线索,即从观察图象整体性质出发,过渡到图象上点的坐标的关系分析,最后 (下转第26页)

三、教学建议

1. 重视基础知识与基本技能的教学

高考对教学具有明显的导向作用,“概率与统计”这一专题在高考试卷中所占的比重越来越重,许多概率试题设计新颖,构思巧妙,故意设置“陷阱”给学生,这就要求学生重视概念的理解与把握,重视对一些形同质异概念的辨识,深入理解题意,从而解决问题.另一方面,数学关键能力是数学学业质量评价的重要依据.因此,高考数学不仅重视基础知识的考查,还重视关键能力的考查,数学关键能力是具有数学基本特征的、适应学生个人终身发展和社会发展需要的品质.学生在学习“概率与统计”板块时逐步形成并完善数学关键能力,在培养学生的数学关键能力时,需要以数学基本思想为指引,以数学核心知识为载体,以数学理性思维为旨趣,以数学基本活动为途径,以数学核心素养为目标.

2. 重视数学思想方法的应用

数学思想是指人们对数学理论和内容的本质认识,数学方法是数学思想具体化,是数学解决问题的策略和程序,数学课程标准将数学思想方法列入数学目标之一,数学思想方法是数学的灵魂和精髓,是让数学“化繁为简”的钥匙,它蕴含于数学知识的发生、发展和应用过程中,它渗透在数学教学的全过程中.在概率统计这个板块中,主要包括随机思想、统计思想、模型思想,学会抓住数学思想方法,善于运用数学思想方法,能帮助我们提高解题能力.因此,在数学学习过程中要及时培养自己在解题中锻炼数学思想的习惯,要深入体会教材例题、习题中所体现的数学思想方法,逐渐培养用数学思想方法解决问题的意识.还应该系统性地总结数学思想方法,掌握它的本质与内涵,更好地将所学的知识融会贯通,解题时举一反三.

3. 重视核心素养的发展

在学习概率与统计时,应注重发展学生的数感、数据分析能力、运算能力和模型思想等,为了适应新时代发展对人才培养的需要,还要注重发展学生的应用意识与创新意识.核心素养是指学生应具备的适应终身发展和社会发展所需要的必备品格和关键能力,基于数学核心素养的数学教学,要求教师要转化观念,将“学生为本”的理念与教学实际有机结合,引导学生多去思考数学,体验数学,才能使数学核心素养得以有效体现与落实.在教学中要整体把握数学课程,从一节一节的课时中跳出来,尝试单元教学,将核心素养真正落实到课堂,落实到教学中.

4. 重视问题情境的创设

由经济合作与发展组织(OECD)牵头实施的“国际学生评估项目”(PISA)对数学素养的定义是“在各种各样情境中能够自觉产生和使用数学的意识,使用数学概念、程序、事实和工具来描述、解释说理甚至预测,能够运用数学理智进行判断和决策的能力”.学生的数学素养离不开情境,重视情境的创设,让学生在情境中理解并应用所学的概率与统计知识.《数学课程标准(2017年版)》明确指出:“让学生在现实情境中体验和理解数学.”创设一个良好的问题情境,有利于促进学生主动地、个性地、积极地学习,不断提升发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力.

参考文献:

[1] 余小芬,蒲霞露,刘成龙.2013～2018年高考数学全国卷“概率与统计”专题分析[J].中学数学(上),2018(8).

(上接第12页) 用符号语言表示并形成数学概念.在这个过程中,学生经历了从特殊到一般,从零散到整体,从表象到本质,最终达成了用数学语言对共性进行表征并形成严谨的数学概念的数学抽象的一般过程.概括归纳是探求共性的思维,是从具体到抽象的必然过程.

3. 类比迁移是数学抽象的生长点

本节课的教学设计从形成学生统一的认知结构出发,从数学培养学生理性思维的功能出发,着眼为“迁移”而教(偶函数的概念迁移到奇函数的概念,奇偶性的研究迁移到函数其他性质的研究).学生在体验用数学定义解决问题的过程中,更要学会概念教学背后的数学抽象过程,并应用这种抽象思维去类比迁移探究新的概念,这正是数学抽象的意义所在.

参考文献:

[1] 何志明.挖掘概念本质 发展核心素养——数学概念教学的几点体会[J].中学数学教学参考,2021(16).

[2] 邓翰香,吴立宝,沈婕.指向数学抽象素养的教材分析框架与案例剖析——以人教A版“函数单调性”为例[J].数学通报,2019(10).