

八种方法对抗数列不等式的证明

陕西省咸阳师范学院基础教育课程研究中心

(712000)

安振平

不等式的证明是高中数学的一个难点内容,难就难在“放大”或“缩小”的技巧性强、目标不很明确、放缩适度的把握等方面.数列不等式涉及的字母多,综合度更高,其证明的难度更大.本文总结八种方法对抗数列不等式的证明,以供高三师生复习备考时参考.

1. 做差比较法

做差比较法的本质是:要证明 $x > y$, 只要证明 $x - y > 0$.

例1 (1984年全国高考题) 已知数列 $\{a_n\}$ 中,

$$a_1 = a (a > 2), \text{ 且 } a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2(a_n - 1)} (n \in \mathbf{N}^*).$$

(1) 求证: $a_2 > 2$;

(2) 求证: $a_{n+1} < a_n$.

证明 (1) 因为 $a_1 = a > 2$, 所以 $a_1 - 1 > 1$, $a_1 - 2 > 0$ 于是

$$a_2 - 2 = \frac{a_1^2}{2(a_1 - 1)} - 2 = \frac{a_1^2 - 4a_1 + 4}{2(a_1 - 1)} = \frac{(a_1 - 2)^2}{2(a_1 - 1)} > 0,$$

故 $a_2 > 2$.

(2) 用数学归纳法可以证明 $a_n > 2$. 下用作差法:

$$\text{因为 } a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2(a_n - 1)}, a_n > 2, \text{ 有 } a_n - 1 > 0, \\ 2 - a_n < 0,$$

$$\text{所以 } a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2}{2(a_n - 1)} - a_n = \frac{a_n(2 - a_n)}{2(a_n - 1)} < 0,$$

故有 $a_{n+1} < a_n$.

点评 做差法是证明不等式的最为基本的、首选的方法. 做差之后的变形, 有时是需要配方、有时需要分解因式, 关键是找出一个非负、或者非正的量. 类似用做差方法可以证明如下问题: 数列 $\{a_n\}$

的通项公式为 $a_n = (n+1)(\frac{9}{10})^n, n = 1, 2, \dots$, 求证: 当 $n < 8$ 时, 有 $a_{n+1} > a_n$; 当 $n > 8$ 时, 有 $a_{n+1} < a_n$.

2. 做商比较法

做商比较法的本质是: 对 $x > 0, y > 0$, 要证明

$$x > y, \text{ 只要证明 } \frac{x}{y} > 1.$$

例2 (2011年重庆高考理科题) 设实数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_{n+1} = a_{n+1}S_n (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 若 $a_1, S_2, -2a_2$ 成等比数列, 求 S_2 和 a_3 ;

(2) 求证: 对 $k \geq 3$ 有 $0 \leq a_{k+1} \leq a_k \leq \frac{4}{3}$.

解 (1) 易得 $S_2 = -2, a_3 = \frac{2}{3}$.

(2) 由题设条件有 $S_n + a_{n+1} = a_{n+1}S_n$,

$$\text{故 } S_n \neq 1 \text{ 且 } a_{n+1} = \frac{S_n}{S_n - 1}, S_n = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - 1},$$

从而对 $k \geq 3$ 有

$$a_k = \frac{S_{k-1}}{S_{k-1} - 1} = \frac{a_{k-1} + S_{k-2}}{a_{k-1} + S_{k-2} - 1} \\ = \frac{a_{k-1} + \frac{a_{k-1}}{a_{k-1} - 1}}{a_{k-1} + \frac{a_{k-1}}{a_{k-1} - 1} - 1} = \frac{a_{k-1}^2}{a_{k-1}^2 - a_{k-1} + 1}. \quad (*)$$

因为 $a_{k-1}^2 - a_{k-1} + 1 = (a_{k-1} - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ 且

$a_{k-1}^2 \geq 0$, 由 (*) 得 $a_k \geq 0$.

要证 $a_k \leq \frac{4}{3}$, 由 (*), 只要证

$$\frac{a_{k-1}^2}{a_{k-1}^2 - a_{k-1} + 1} \leq \frac{4}{3},$$

即证 $3a_{k-1}^2 \leq 4(a_{k-1}^2 - a_{k-1} + 1)$, 即 $(a_{k-1} - 2)^2 \geq 0$.

0. 此式明显成立.

因此 $a_k \leq \frac{4}{3} (k \geq 3)$.

最后证 $a_{k+1} \leq a_k$, 而已证得 $a_k \geq 0$, 当 $a_k = 0$ 时,

显然成立; 当 $a_k > 0$ 时, 做商, 只要证 $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq 1$.

事实上

因为 $a_k + \frac{1}{a_k} \geq 2$, 所以

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_k}{a_k^2 - a_k + 1} = \frac{1}{a_k + \frac{1}{a_k} - 1} \leq \frac{1}{2 - 1} = 1.$$

因此 $a_{k+1} \leq a_k (k \geq 3)$.

故有 $0 \leq a_{k+1} \leq a_k \leq \frac{4}{3}$

点评 当得到 $a_k = \frac{a_{k-1}^2}{a_{k-1}^2 - a_{k-1} + 1}$, 要证 $0 \leq a_k \leq \frac{4}{3}$, 只要研究函数 $y = \frac{x^2}{x^2 - x + 1}$ 的最值. 将 $a_{k+1} \leq a_k$ 做商变更为 $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_k}{a_k^2 - a_k + 1}$, 也就是转化为求函数 $y = \frac{x}{x^2 - x + 1}$ 的最大值. 做商之后, 等号的另一端只含一个字母, 简单化了, 也就函数化了.

3. 均值不等式法

二元、 n 元算术——几何平均值不等式是证明不等式的重要工具, 在数列不等式证明里, 往往能起到有效的放缩作用.

例 3 (2011 年广东高考理科题) 设 $b > 0$, 数列

$\{a_n\}$ 满足 $a_1 = b, a_n = \frac{nba_{n-1}}{a_{n-1} + 2n - 2} (n \geq 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 对于一切正整数 $n, a_n \leq \frac{b^{n+1}}{2^{n+1}} + 1$.

解 (1) 由 $a_n = \frac{nba_{n-1}}{a_{n-1} + 2n - 2}$ 得

$$\frac{n}{a_n} = \frac{2}{b} \cdot \frac{n-1}{a_{n-1}} + \frac{1}{b},$$

当 $b = 2$ 时, $\frac{n}{a_n} - \frac{n-1}{a_{n-1}} = \frac{1}{2}$, 所以 $\{\frac{n}{a_n}\}$ 是以首项为 $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}$, 公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列, 所以 $\frac{n}{a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n}{2}$, 从而 $a_n = 2$

当 $b \neq 2$ 时, $\frac{n}{a_n} + \frac{1}{2-b} = \frac{2}{b}(\frac{n-1}{a_{n-1}} + \frac{1}{2-b})$, 所以 $\{\frac{n}{a_n} + \frac{1}{2-b}\}$ 是首项为 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2-b} = \frac{2}{b(2-b)}$, 公比为 $\frac{2}{b}$ 的等比数列, 所以 $\frac{n}{a_n} + \frac{1}{2-b} = \frac{2}{b(2-b)} \cdot (\frac{2}{b})^{n-1} = \frac{2^n}{b^n(2-b)}$, 从而 $a_n = \frac{nb^n(2-b)}{2^n - b^n}$.

综上所述, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n = \begin{cases} 2, & (b=2) \\ \frac{nb^n(2-b)}{2^n - b^n}, & (b \neq 2) \end{cases}$$

(2) 当 $b = 2$ 时, 不等式显然成立;

当 $b \neq 2$ 时, 要证 $a_n \leq \frac{b^{n+1}}{2^{n+1}} + 1$, 只需证

$$\frac{nb^n(2-b)}{2^n - b^n} \leq \frac{b^{n+1}}{2^{n+1}} + 1,$$

$$\text{即证 } n \cdot 2^{n+1} \cdot b^n \leq (2^{n+1} + b^{n+1}) \cdot \frac{b^n - 2^n}{b - 2} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} & \text{因为 } (2^{n+1} + b^{n+1}) \cdot \frac{b^n - 2^n}{b - 2} \\ &= (2^{n+1} + b^{n+1})(b^{n-1} + 2b^{n-2} + 2^2b^{n-3} + \cdots + 2^{n-1}) \\ &= (2^{n+1}b^{n-1} + 2^{n+2}b^{n-2} + \cdots + 2^{2n}) \\ & \quad + (b^{2n} + 2b^{2n-1} + \cdots + 2^{n-1}b^{n+1}) \\ &= 2^{n+1}b^n \left[\left(\frac{1}{b} + \frac{2}{b^2} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{b^n} \right) + \left(\frac{b^n}{2^{n+1}} + \frac{b^{n-1}}{2^n} + \cdots + \frac{b}{2^2} \right) \right] \\ &= 2^{n+1}b^n \left[\left(\frac{1}{b} + \frac{b}{2^2} \right) + \left(\frac{2}{b^2} + \frac{b^2}{2^3} \right) + \cdots \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{2^{n-1}}{b^n} + \frac{b^n}{2^{n+1}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \geq 2^{n+1}b^n \left(2\sqrt{\frac{1}{b} \cdot \frac{b}{2^2}} + 2\sqrt{\frac{2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{2^3}} + \cdots \right. \\ & \quad \left. + 2\sqrt{\frac{2^{n-1}}{b^n} \cdot \frac{b^n}{2^{n+1}}} \right) \text{ (用到二元均值不等式)} \\ &= 2^{n+1}b^n(1 + 1 + \cdots + 1) = n2^{n+1}b^n. \end{aligned}$$

所以不等式 (*) 成立, 从而原不等式成立.

综上所述, 当 $b > 0$ 时, 对于一切正整数 n , $a_n \leq \frac{b^{n+1}}{2^{n+1}} + 1$.

点评 均值不等式的特点是把“和”转化为“积”, 把“积”转化为“和”. 事实上, 利用多元基本不等式更简单:

$$\begin{aligned} & (2^{n+1} + b^{n+1})(b^{n-1} + 2b^{n-2} + 2^2b^{n-3} + \cdots + 2^{n-1}) \\ & \geq 2\sqrt{2^{n+1}b^{n+1}} \cdot n\sqrt{b^{\frac{n-1}{n+1}}2^{\frac{n-1}{n+1}}} = n \cdot 2^{n+1} \cdot b^n. \end{aligned}$$

4. 柯西不等式法

柯西不等式是高中数学教材里的选学内容, 据此及其变形去证明一些考题, 其方法是简单明快的, 对一些数列不等式的证明也不例外.

例 4 (2008 年陕西高考理科题) 已知数列

$\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{3}{5}, a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 1}, n = 1, 2, \cdots$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 对任意的 $x > 0, a_n \geq \frac{1}{1+x} -$

$$\frac{1}{(1+x)^2} \left(\frac{2}{3^n} - x \right), n = 1, 2, \cdots;$$

(3) 证明: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n > \frac{n^2}{n+1}$.

证明 这里仅给出(3)证法. 由(1)题的答案

$a_n = \frac{3^n}{3^n + 2}$, 代入第(3)题, 就得: 已知 n 为正整数, 求证:

$$\frac{3}{3+2} + \frac{3^2}{3^2+2} + \cdots + \frac{3^n}{3^n+2} > \frac{n^2}{n+1}$$

下面给出证明. 事实上, 用柯西不等式, 使得

$$\begin{aligned} & (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)^2 \\ &= \left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1}} \cdot \sqrt{x_1} + \frac{y_2}{\sqrt{x_2}} \cdot \sqrt{x_2} + \cdots + \frac{y_n}{\sqrt{x_n}} \cdot \sqrt{x_n} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{y_1^2}{x_1} + \frac{y_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{y_n^2}{x_n} \right) (x_1 + x_2 + \cdots + x_n), \end{aligned}$$

$$\text{即有 } \frac{y_1^2}{x_1} + \frac{y_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{y_n^2}{x_n} \geq \frac{(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}.$$

据此, 并注意到 $\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$, 便有

$$\begin{aligned} & \frac{3}{3+2} + \frac{3^2}{3^2+2} + \cdots + \frac{3^n}{3^n+2} \\ &= \frac{1}{1+\frac{2}{3}} + \frac{1}{1+\frac{2}{3^2}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{2}{3^n}} \\ &\geq \frac{(1+1+\cdots+1)^2}{1+\frac{2}{3}+1+\frac{2}{3^2}+\cdots+1+\frac{2}{3^n}} \\ &= \frac{n^2}{n+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^n}} \\ &= \frac{n^2}{n+1-\frac{1}{3^n}} \\ &> \frac{n^2}{n+1}, \end{aligned}$$

即有 $\frac{3}{3+2} + \frac{3^2}{3^2+2} + \cdots + \frac{3^n}{3^n+2} > \frac{n^2}{n+1}$. 得证.

点评 柯西不等式的变形 $\frac{y_1^2}{x_1} + \frac{y_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{y_n^2}{x_n} \geq$

$\frac{(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$, 其应用十分广泛, 可以证明很多不等式, 例如: 2009 年陕西数学竞赛预赛试题: 求证:

$$\begin{aligned} & C_n^0 \frac{3^0}{3^0+1} + C_n^1 \frac{3^1}{3^1+1} + C_n^2 \frac{3^2}{3^2+1} + \cdots + C_n^n \frac{3^n}{3^n+1} \\ &\geq \frac{3^n \cdot 2^n}{3^n + 2^n}. \end{aligned}$$

5. 构造函数法

没有函数, 依据问题的情景来构造函数, 通过导数方法研究函数性质, 便能证得目标不等式. 这种利

用函数思想证明不等式的方法, 是各级各类考题的热门话题, 值得关注.

例5 设数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $2na_{n+1} =$

$(n+1)a_n$, 且 $b_n = \ln(1+a_n) + \frac{1}{2}a_n^2$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 对一切 $n \in \mathbf{N}^*$, 证明: $\frac{2}{a_n+2} < \frac{a_n}{b_n}$ 成立.

解 容易求得 $a_n = n(\frac{1}{2})^n$. 下面证明第(2)

题.

$\because a_n > 0, b_n = \ln(1+a_n) + \frac{1}{2}a_n^2 > 0, n \in \mathbf{N}^*$,

$\therefore$ 要证明 $\frac{2}{a_n+2} < \frac{a_n}{b_n}$, 即证 $2b_n < a_n^2 + 2a_n$.

即要证明 $b_n - \frac{1}{2}a_n^2 - a_n < 0$,

也即证明 $\ln(1+a_n) - a_n < 0$ 成立.

令 $f(x) = \ln(1+x) - x$ ($x \geq 0$),

$\because f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0$ ($x > 0$),

即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 是减函数, 故

$f(x) < f(0) = 0$.

$\therefore \ln(1+x) - x < 0$, 即 $\ln(1+a_n) - a_n < 0$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立.

故 $\frac{2}{a_n+2} < \frac{a_n}{b_n}$ 成立.

点评 函数 $f(x) = \ln(1+x) - x$ ($x > -1$) 是一个经典的函数, 由此衍生的高考题目是非常多样的. 例如 2011 年湖北高考理科压卷题:

(I) 已知函数 $f(x) = \ln x - x + 1$, $x \in (0, +\infty)$, 求函数 $f(x)$ 的最大值;

(II) 设 a_k, b_k ($k = 1, 2, \dots, n$) 均为正数, 证明:

(1) 若 $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, 则 $a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdots a_n^{b_n} \leq 1$;

(2) 若 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1$, 则

$$\frac{1}{n} \leq b_1^{b_1} b_2^{b_2} \cdots b_n^{b_n} \leq b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2.$$

6. 构造对偶式

数学里的共轭无理式、共轭复数, 相类似的一对关系, 从一个关系联系到另一个对偶关系式, 有时能起到化难为易, 催化剂的作用.

例6 对于一切大于 1 的自然数, 求证:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) > \frac{\sqrt{2n+1}}{2}.$$

$$\text{证明: 设 } M = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) \\ = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1},$$

$$N = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2n+1}{2n}, \text{ 容易得知 } M > N >$$

0, 于是有

$$M^2 > M \cdot N = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2n}{2n-1}.$$

$$\frac{2n+1}{2n} = \frac{2n+1}{3} > \frac{2n+1}{4},$$

开方, 得

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) > \frac{\sqrt{2n+1}}{2}.$$

点评 2010 年广东高考理科压卷题为: 已知曲线 $C_n: x^2 - 2nx + y^2 = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). 从点 $P(-1, 0)$ 向曲线 C_n 引斜率为 k_n ($k_n > 0$) 的切线 l_n , 切点为 $P_n(x_n, y_n)$.

(1) 求数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明:

$$x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdots x_{2n-1} < \sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}} < \sqrt{2} \sin \frac{x_n}{y_n}.$$

容易求得 $x_n = \frac{n}{n+1}$, 这样第(2)问的左不等式

$$\text{就等价于 } x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdots x_{2n-1} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times$$

$$\frac{2n-1}{2n} < \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}},$$

这个不等式等价变形即为本例。

7. 数学归纳法

对于关于任意正整数的且能够建立递推关系的数列不等式, 一般能够寻找到用数学归纳法证明的途径. 在从 k 到 $k+1$ 的论证过程中, 往往要用到做差法、均值不等式法、构造函数法、放缩法等等.

例 7 已知 $a = (\cos \frac{\pi}{4}x, 1)$, $b = (f(x),$

$2\sin \frac{\pi}{4}x)$, $a \parallel b$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = f(a_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. 证明: $0 < a_n < a_{n+1} < 1$.

证明 $\because a \parallel b$,

$$\therefore \cos \frac{\pi}{4}x \cdot 2\sin \frac{\pi}{4}x - f(x) = 0,$$

$$\therefore f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x,$$

$$\therefore a_{n+1} = f(a_n) = \sin \frac{\pi}{2}a_n,$$

下面用数学归纳法证明: $0 < a_n < a_{n+1} < 1$.

$$\text{① } n=1 \text{ 时, } a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \sin \frac{\pi}{2}a_1 = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore 0 < a_1 < a_2 < 1$ 故结论成立;

② 假设 $n=k$ 时结论成立, 即 $0 < a_k < a_{k+1} < 1$,

$$\therefore 0 < \frac{\pi}{2}a_k < \frac{\pi}{2}a_{k+1} < \frac{\pi}.$$

$$\therefore 0 < \sin \frac{\pi}{2}a_k < \sin \frac{\pi}{2}a_{k+1} < 1,$$

即 $0 < a_{k+1} < a_{k+2} < 1$,

也就是说 $n=k+1$ 时, 结论成立.

由 ①、② 可知, 对一切 $n \in \mathbb{N}^*$ 均有 $0 < a_n < a_{n+1} < 1$.

例 8 (2002 年全国高考理科题) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n^2 - na_n + 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$

(1) 当 $a_1 = 2$ 时, 求 a_2, a_3, a_4 , 并由此猜想出 a_n 的一个通项公式;

(2) 当 $a_1 \geq 3$ 时, 证明对所有的 $n \geq 1$, 有

(i) $a_n \geq n+2$;

$$(ii) \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n} \leq \frac{1}{2}.$$

解 (1) 易求得 $a_n = n+1$ ($1 \leq n \in \mathbb{N}$).

(2) (i) 用数学归纳法证明:

① 当 $n=1$ 时, $a_1 \geq 3 = 1+2$, 不等式成立;

② 假设当 $n=k$ 时不等式成立, 即有 $a_k \geq k+2$,

那么

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k \cdot a_k - ka_k + 1 \\ &\geq (k+2)a_k - ka_k + 1 \\ &= 2a_k + 1 \\ &\geq 2(k+2) + 1 \\ &= 2k+5 \geq k+3 \end{aligned}$$

此时有 $a_{k+1} \geq (k+1)+2$.

根据 ① 和 ② 可知, 对一切 $n \geq 1$, 均有 $a_n \geq n+2$.

(ii) 上文已证得 $a_{k+1} \geq 2a_k + 1$,

即 $a_{k+1} + 1 \geq 2(a_k + 1)$,

从而 $a_k + 1 \geq (a_1 + 1) \cdot 2^{k-1}$

$$\geq (3+1) \cdot 2^{k-1} = 2^{k+1},$$

$$\text{即 } \frac{1}{1+a_k} \leq \frac{1}{2^{k+1}},$$

$$\text{故 } \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k+1}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.$$

点评 用数学归纳法证明数列不等式在历年的高考中时有出现, 例如: 2010 年湖北高考理科压卷题为:

已知函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x} + c$ ($a > 0$) 的图象在

点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x - 1$.

(1) 用 a 表示出 b, c ;

(2) 若 $f(x) > \ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围;

(3) 证明: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) + \frac{n}{2(n+1)}$. ($n \geq 1$).

其实, 这个不等式的证明, 就可以用数学归纳法来实施.

8. 逐项放缩法

在证明不等式的各种方法里, 都需要从不等式一端开始、放大(或缩小)若干次, 以变形到另一端. 其放大缩小一定要把握好“度”, 要恰到好处.

例9 已知 $a_1 = A_1^1, a_2 = A_2^1 + A_2^2, \dots, a_n = A_n^1 + A_n^2 + \cdots + A_n^n$, 当 $n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$ 时, 求证:

(1) $a_n = n(a_{n-1} + 1)$;

(2) $(1 + \frac{1}{a_1})(1 + \frac{1}{a_2})(1 + \frac{1}{a_3}) \cdots (1 + \frac{1}{a_n}) < 3$.

证明 (1) $\because A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

$$= n \frac{(n-1)!}{[(n-1)-(k-1)]!} = n A_{n-1}^{k-1}, (n \geq k \geq 2)$$

$$\therefore a_n = A_n^1 + A_n^2 + \cdots + A_n^n = n + n(A_{n-1}^1 + A_{n-1}^2 + \cdots + A_{n-1}^{n-1}) = n(1 + a_{n-1}).$$

(2) 由(1) $a_{n-1} + 1 = \frac{a_n}{n}$,

$$\therefore (1 + \frac{1}{a_1})(1 + \frac{1}{a_2})(1 + \frac{1}{a_3}) \cdots (1 + \frac{1}{a_n})$$

$$= \frac{a_1 + 1}{a_1} \times \frac{a_2 + 1}{a_2} \times \frac{a_3 + 1}{a_3} \times \cdots \times \frac{a_n + 1}{a_n}$$

$$= \frac{a_2}{2a_1} \times \frac{a_3}{3a_2} \times \cdots \times \frac{a_{n+1}}{(n+1)a_n} = \frac{a_{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} (A_{n+1}^1 + A_{n+1}^2 + \cdots + A_{n+1}^{n+1})$$

$$= \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \cdots + \frac{1}{2!} + 1 + 1$$

$$< 2 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n}$$

$$= 2 + 1 - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n} < 3.$$

点评 逐项放大一点, 便于裂项求和, 这样就达到了证明的目标. 对经典题目: 数列 $\{a_n\}$ 的通项

公式为 $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n, n = 1, 2, \dots$, 求证: $a_n < 3$,

$n = 1, 2, \dots$. 其证明就可以化归为本题的结论.

例10 (2011年天津理科高考题) 已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足: $b_n a_n + a_{n+1} + b_{n+1} a_{n+2} = 0, b_n =$

$$\frac{3 + (-1)^n}{2}, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } a_1 = 2, a_2 = 4.$$

(1) 求 a_3, a_4, a_5 的值.

(2) 设 $c_n = a_{2n-1} + a_{2n+1}, n \in \mathbf{N}^*$, 证明: $\{c_n\}$ 是等比数列;

(3) 设 $S_k = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k}, k \in \mathbf{N}^*$, 证明:

$$\sum_{k=1}^{4n} \frac{S_k}{a_k} < \frac{7}{6} (n \in \mathbf{N}^*).$$

解 (1) $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = -3, a_4 = -5, a_5 = 4$.

(2) 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 有

$$a_{2n-1} + a_{2n} + 2a_{2n+1} = 0, \quad \textcircled{1}$$

$$2a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} = 0, \quad \textcircled{2}$$

$$a_{2n+1} + a_{2n+2} + 2a_{2n+3} = 0, \quad \textcircled{3}$$

$$\text{由 } \textcircled{2} - \textcircled{3}, \text{ 得 } a_{2n} = a_{2n+3}. \quad \textcircled{4}$$

将 ④ 代入 ①, 可得

$$a_{2n+1} + a_{2n+3} = -(a_{2n-1} + a_{2n+1})$$

$$\text{即 } c_{n+1} = -c_n (n \in \mathbf{N}^*)$$

$$\text{又 } c_1 = a_1 + a_3 = -1, \text{ 故 } c_n \neq 0,$$

因此 $\frac{c_{n+1}}{c_n} = -1$, 所以 $\{c_n\}$ 是等比数列.

(3) 由(2) 可得 $a_{2k-1} + a_{2k+1} = (-1)^k$,

于是, 对任意 $k \in \mathbf{N}^*$ 且 $k \geq 2$, 有

$$a_1 + a_3 = -1,$$

$$-(a_3 + a_5) = -1,$$

$$a_5 + a_7 = -1,$$

...

$$(-1)^k (a_{2k-3} + a_{2k-1}) = -1.$$

将以上各式相加, 得

$$a_1 + (-1)^k a_{2k-1} = -(k-1),$$

$$\text{即 } a_{2k-1} = (-1)^{k+1} (k+1),$$

此式, 当 $k=1$ 时也成立.

$$\text{由 } \textcircled{4} \text{ 式得 } a_{2k} = (-1)^{k+1} (k+3).$$

$$\text{从而 } S_{2k} = (a_2 + a_4) + (a_6 + a_8) + \cdots + (a_{4k-2} + a_{4k}) = -k,$$

$$S_{2k-1} = S_{2k} - a_{4k} = k+3.$$

所以, 对任意 $n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{4n} \frac{S_k}{a_k} = \sum_{m=1}^n \left(\frac{S_{4m-3}}{a_{4m-3}} + \frac{S_{4m-2}}{a_{4m-2}} + \frac{S_{4m-1}}{a_{4m-1}} + \frac{S_{4m}}{a_{4m}} \right)$$

$$= \sum_{m=1}^n \left(\frac{2m+2}{2m} - \frac{2m-1}{2m+2} - \frac{2m+3}{2m+1} + \frac{2m}{2m+3} \right)$$

$$= \sum_{m=1}^n \left(\frac{2}{2m(2m+1)} + \frac{3}{(2m+2)(2m+3)} \right)$$

$$= \frac{2}{2 \times 3} + \sum_{m=2}^n \frac{5}{2m(2m+1)}$$

$$+ \frac{3}{(2n+2)(2n+3)} < \frac{1}{3} \quad \blacktriangleright$$

一高考试题之图释

四川省西昌市安宁镇养窝监狱组织人事科

(615000)

王承宣

题目 (2011年湖南省试题理22) 已知函数

$$f(x) = x^3, g(x) = x + \sqrt{x}.$$

(1) 求函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的零点个数, 并说明理由;

(2) 设数列 $\{a_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 满足 $a_1 = a$ ($a > 0$), $f(a_{n+1}) = g(a_n)$. 证明: 存在常数 M , 使得对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_n \leq M$.

原参考解答有生涩之感, 适当组合函数, 提供图象解答有拨云见日之爽.

分析 (1) 令 $f_1(x) = x^3 - x$ ($x \geq 0$), $g_1(x) = \sqrt{x}$ 时. 则 $f_1'(x) = 3x^2 - 1$, 由 $3x^2 - 1 = 0$ 解得 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 易知 $f_1(x)$ 在 $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ 上单调递减, 在 $[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$ 上单调递增. 其图象如图1所示. $f_1(x)$ 的图象过点 $(1, 0)$.

显然 $h(x) = f_1(x) - g_1(x)$, 由图知 $x = 0$ 时, $f_1(x) = g_1(x)$, 即 $x = 0$ 是 $h(x)$ 的零点; 当 $x > 1$ 时, $f_1(x)$ 单调递增且增速快, $g_1(x)$ 单调递增且增速慢. 存在 x_0 使 $f_1(x_0) = g_1(x_0)$ (如图1), 即 $x = x_0$ 是 $h(x)$ 的零点. 根据 $f_1(x)$ 与 $g_1(x)$ 的单调性特点知: $h(x)$ 在 $x \geq 0$ 的范围内有且仅有两个零点.

分析 (2) 如图1, 当 $x \geq x_0$ 时, $f_1(x) \geq g_1(x)$, 即 $x^3 \geq x + \sqrt{x}$; 当 $0 < x < x_0$ 时, $f_1(x) < g_1(x)$, 即

$$x^3 < x + x\sqrt{x}.$$

当 $a_1 = a \geq x_0$ 时, 由 $f(a_2) = g(a_1)$ 知 $a_2^3 = a_1 + \sqrt{a_1}$, 而由上知 $a_1 + \sqrt{a_1} \leq a_1^3$, 故 $0 < a_2 \leq a_1$; 同理 $a_3^3 = a_2 + \sqrt{a_2} \leq a_1 + \sqrt{a_1} \leq a_1^3$, 故 $0 < a_3 \leq a_1$, 依次类推有 $0 < a_n \leq a_1 = a$. 此时取 $M = a$, 则对任意 n 有 $a_n \leq M$.

当 $a_1 = a < x_0$ 时, $a_2^3 = a_1 + \sqrt{a_1} < x_0 + \sqrt{x_0} = x_0^3$, 即 $a_2 < x_0$, 而 $a_3^3 = a_2 + \sqrt{a_2} < x_0 + \sqrt{x_0} = x_0^3$, 即 $a_3 < x_0$, 依此类推有 $a_n < x_0$, 此时取 $M = x_0$, 则对任意 n 有 $a_n < M$.

综上, 存在常数 $M = \max\{x_0, a\}$, 使得对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_n \leq M$.

在推导 $a_1 = a < x_0$ 的情形时 ($a > 0$), 以上是一个方面, 另外还有 $a_2^3 = a_1 + \sqrt{a_1} > a_1^3$, 即 $a_2 > a_1$, 因此 $a_1 < a_2 < x_0$, 依此类推还可附得以下结论: 在此种情形下 $a_1 < a_2 < \dots < a_n < x_0$.

辅之以适当的图象, 使此压轴题内涵清晰, 能帮助我们深刻理解原参考解答、获取新的结论、开辟解题途径、拓展思维触角. (收稿日期: 2011-10-11)

$$\begin{aligned} & \blacktriangleright + \sum_{n=2}^n \frac{5}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{3}{(2n+2)(2n+3)} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{5}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] + \frac{3}{(2n+2)(2n+3)} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2n+1} + \frac{3}{(2n+2)(2n+3)} \\ &< \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

对于 $n = 1$, 不等式显然成立.

点评 本题主要考查数列的有关基础知识, 考查运算能力、推理论证能力、综合分析和解决问题的能力及分类讨论的思想方法. 不等式证明时依然是放大后, 裂项求和达到目标的. 放缩方法证明不等式的一个经典例子是: 把正整数数列 $1, 2, 3, \dots$ 中含数

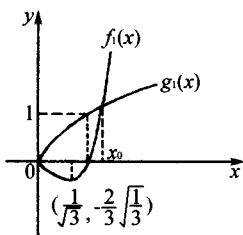


图1

字9的项都删除掉, 剩下的项按原次序组成一个数列, 记作 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.

求证: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 80$. 同样对含数字1(或2;或8)的项都删除掉, 得到的数列和也小于一个正常数.

数列不等式的证明是高考、竞赛的一个热点, 试题解决的难度较大, 需要综合应用多种知识, 多个方法, 诸如: 作差作商比较法、构造函数法、构造对偶关系法、重要不等式方法、数学归纳法、放缩方法等. 应当紧紧盯住证明目标, 结合自己积累已有知识和解题经验, 选择恰当的方法, 进行合理、合情、有效的分析问题、变更问题, 进行适度的连续放大或缩小变形, 实现数列不等式最优途径的证明.

(收稿日期: 2012-09-04)