江苏省仪征中学 2020-2021 学年度高三数学周六试卷(2021.1.9)

副标题

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、选择题（(本大题共 8 小题，共 40.0 分)）

1. 已知集合$M=\{x|(x-1)^2<4,x\in R\}$，$N=\{-2,-1,0，1，2\}$，则$M\cap N=(\quad)$

A. $\{0,1，2\}$　B. $\{-1,0，1，2\}$　C. $\{-1,0，2，3\}$　D. $\{0,1，2，3\}$

2. 设$z=\frac{2+i}{1-i}$，则 z 的虚部为$(\quad)$

A. $\frac{3}{2}$　B. $-\frac{3}{2}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $-\frac{1}{2}$

3. 已知 m，$n\in R$，则“$mn<0$”是“抛物线$mx^2+ny=0$的焦点在 y 轴正半轴上”的$(\quad)$

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　D. 既不充分也不必要条件

4. 设λ为实数，已知向量$\vec{m}=(-1,2)$，$\vec{n}=(1,\lambda)$.若$\vec{m}\perp\vec{n}$，则向量$\vec{m}+2\vec{n}$与$\vec{m}$之间的夹角为$(\quad)$

A. $\frac{\pi}{4}$　B. $\frac{\pi}{3}$　C. $\frac{2\pi}{3}$　D. $\frac{3\pi}{4}$

5. 音乐与数学有着密切的联系，我国春秋时期有个著名的“三分损益法”：以“宫”为基本音，“宫”经过一次“损”，频率变为原来的$\frac{3}{2}$，得到“徵”；“徵”经过一次“益”，频率变为原来的$\frac{3}{4}$，得到“商”；……依次损益交替变化，获得了“宫、徵、商、羽、角”五个音阶．据此可推得$(\quad)$

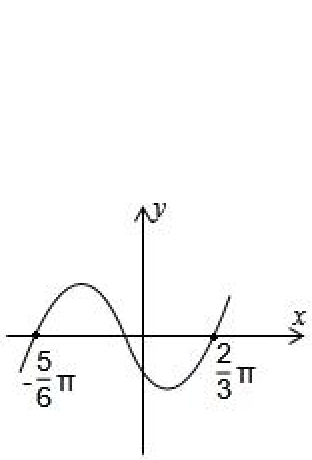
A.“宫、商、角”的频率成等比数列

B.“宫、徵、商”的频率成等比数列

C.“商、羽、角”的频率成等比数列

D.“徵、商、羽”的频率成等比数列

6. 若函数$f(x)=Asin(\omega x+\varphi)$的部分图象如图所示，则函数$f(x)$图象的一条对称轴是$(\quad)$



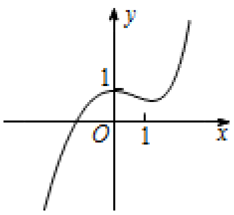
A. $x=-\frac{5\pi}{6}$

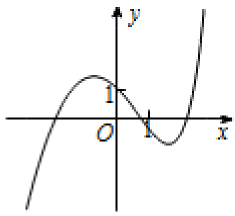
B. $x=-\frac{11\pi}{24}$

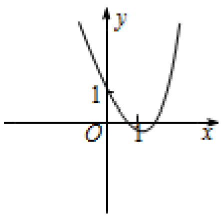
C. $x=\frac{11\pi}{12}$

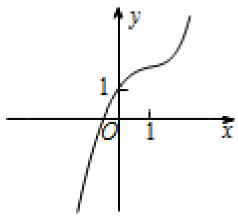
D. $x=\frac{11\pi}{6}$

7. 函数$f(x)=e^x-x^2-2x$的图象大致为(　)

A. 

B. 

C. 

D. 

8. 设实数 k，已知函数$f(x)=\begin{cases}e^x,0\le x<1\\x-1,x\ge 1\end{cases}$，若函数$f(x)-k$在区间$(0,+\infty)$上有两个零点$x_1$，$x_2(x_1<x_2)$，则$(x_2-x_1)f(x_1)$的取值范围是(　)

A. $[1,e^2]$　　B. $[-1,e)$　　C. $[e,e^2)$　　D. $[2,e^2)$

二、不定项选择题（(本大题共 4 小题，共 20.0 分)）

9. 在下列函数中，最小值是 2 的函数有(　)

A. $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$

B. $f(x)=cosx+\frac{1}{cosx}(0<x<\frac{\pi}{2})$

C. $f(x)=\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+3}}$

D. $f(x)=3^x+\frac{4}{3^x}-2$

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦点在圆 O：$x^2+y^2=20$上，圆 O 与双曲线 C 的渐近线在第一、二象限分别交于 M、N 两点，若点$E(0,3)$满足$ME\perp ON(O$为坐标原点)，下列说法正确的有(　)

A. 双曲线 C 的虚轴长为 4

B. 双曲线的离心率为$\sqrt{5}$

C. 双曲线 C 的一条渐近线方程为$y=\frac{3}{2}x$

D. 三角形 OMN 的面积为 8

11. 意大利著名数学家斐波那契在研究兔子繁殖问题时，发现有这样一列数：1，1，2，3，5，...，其中从第三项起，每个数等于它前面两个数的和，后来人们把这样的一

列数组成的数列$\{a_n\}$称为“斐波那契数列”，记S_n为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，则下列结论正确的是(   )

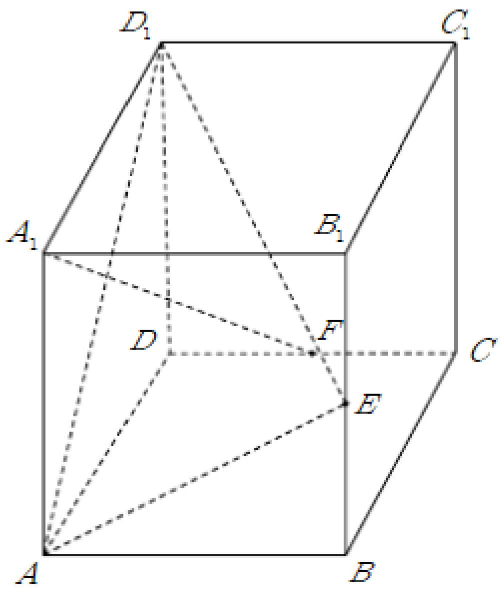
A. $a_8=34$

B. $S_8=54$

C. $S_{2020}=a_{2022}-1$

D. $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2021}=a_{2022}$

12. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2$，E、F 分别为BB_1、CD 中点，P 是BC_1上的动点，则下列说法正确的有(   )



A. $A_1F\perp AE$

B. 三棱锥$P-AED_1$的体积与点 P 位置有关系

C. 平面AED_1截正方体$ABCD-A_1B_1C_1D$的截面面积为$\frac{9}{2}$

D. 点 A 到平面AED_1的距离为$\sqrt{2}$

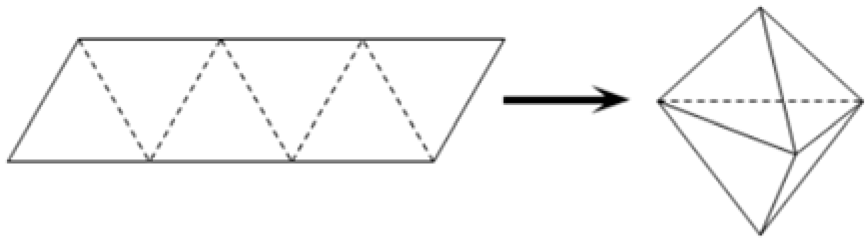
三、填空题（(本大题共 4 小题，共 20.0 分)）

13. 二项式$(2x-\frac{1}{\sqrt{x}})^6$的展开式中$x^3$的系数为______.

14. 已知α、β均为锐角，且$sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则$cos2\beta=$______.

15. 设 F 为双曲线C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点，过 F 且斜率为$\frac{a}{b}$的直线 l 与双曲线 C 的两条渐近线分别交于 A，B 两点，且$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，则双曲线的离心率为________.

16. 农历五月初五是端午节，民间有吃粽子的习惯，粽子又称粽粒，俗称“粽子”，古称“角黍”，是端午节大家都会品尝的食品，传说这是为了纪念战国时期楚国大臣、爱国主义诗人屈原．如图，平行四边形形状的纸片是由六个边长为$\sqrt{2}$的正三角形构成的，将它沿虚线折起来，可以得到如图所示粽子形状的六面体，则该六面体的体积为______；若该六面体内有一球，则该球表面积的最大值为______.



四、解答题（(本大题共 6 小题，共 70.0 分)）

17. 在$\triangle ABC$中，设内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$bcosC+ccosB=-4cosA$，$a=2$.

(1)求角A的值；

(2)若三角形ABC的面积为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，求$\triangle ABC$的周长.

18. 已知等差数列$\{a_n\}$的首项是 1，公差$d>0$，$\{b_n\}$是公比为q的等比数列，且$a_2=b_2$，$a_5=b_3$，$a_{14}=b_4$.

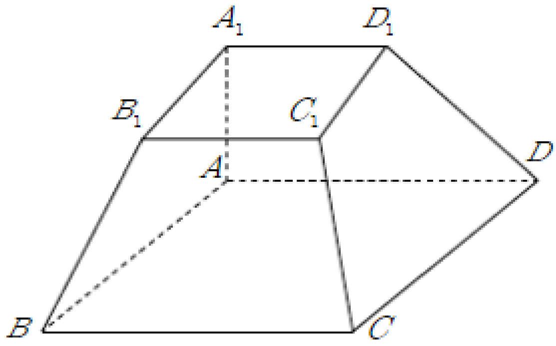
(I)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(II)求数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前n项和T_n.

19. 如图，在四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$是菱形，$AA_1=A_1B_1=\frac{1}{2}AB=1$，$\angle ABC=60°$，$AA_1\perp$平面$ABCD$，点$E$是棱$BC$上一点.

(1)若 E 是 BC 中点，求证：平面$AD_1E\perp$平面CC_1D_1D；

(2)设二面角$E-AD_1-D$的平面角为θ，且$|cos\theta|=\frac{1}{3}$，求线段 CE 的长．



20. 第 13 届女排世界杯于 2019 年 9 月 14 日在日本举行，共有 12 支参赛队伍．本次比赛启用了新的排球用球$MIKSA-V200W$，已知这种球的质量指标ξ(单位：g)服从正态分布$N(270,5^2)$.比赛赛制采取单循环方式，即每支球队进行 11 场比赛(采取 5 局 3 胜制)，最后靠积分选出最后冠军积分规则如下：比赛中以 3：0 或 3：1 取胜的球队积 3 分，负队积 0 分；而在比赛中以 3：2 取胜的球队积 2 分，负队积 1 分．已知第 10 轮中国队对抗塞尔维亚队，设每局比赛中国队取胜的概率为$p(0<p<1)$.

(1)如果比赛准备了 1000 个排球，估计质量指标在(260,265]内的排球个数(计算结果取整数).

(2)第 10 轮比赛中，记中国队 3：1 取胜的概率为$f(p)$.

(ⅰ)求出$f(p)$的最大值点p_0；

(ⅱ)若以p_0作为 p 的值记第 10 轮比赛中，中国队所得积分为 X，求 X 的分布列.

参考数据：$\xi\sim N(u,\sigma^2)$，则$p(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.6826$，$p(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0.9644$.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，以椭圆上的一点和长轴的两个端点为顶点的三角形面积最大值为$2\sqrt{3}$.

(1)求 a，b 的值；

(2)当过点$P(6,0)$的动直线 l 与椭圆 C 交于不同的点 A，B 时，在线段 AB 上取点 Q，使得$|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{BQ}|=|\overrightarrow{AQ}|\cdot|\overrightarrow{BP}|$，问：点 Q 是否总在某条定直线上？若是，求出该直线方程，若不是，说明理由．

22. 设 a 为实数，已知函数$f(x)=e^x+ae^{-x}+(1-a)x-2$．

(1)当$a=2$时，求$f(x)$的单调区间；

(2)当$a\geq 1$时，若$f(x)$有两个不同的零点，求 a 的取值范围．

答案和解析

1.【答案】A

【解析】解：由 M 中不等式变形得：$-2 < x-1 < 2$，

解得：$-1 < x < 3$，即$M=(-1,3)$，

$\because N=\{-2.-1,0，1，2\}$，

$\therefore M\cap N=\{0,1，2\}$.

故选：A.

求出 M 中不等式的解集确定出 M，找出 M 与 N 的交集即可.

此题考查了交集及其运算，熟练掌握交集的定义是解本题的关键.

2.【答案】A

【解析】解：$\because z=\frac{2+i}{1-i}=\frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+3i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$，

$\therefore z$的虚部为$\frac{3}{2}$，

故选：A.

直接利用复数代数形式的乘除运算化简得答案.

本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数的基本概念，是基础题.

3.【答案】C

【解析】解：抛物线$mx^2+ny=0$的焦点在 y 轴正半轴上$\Leftrightarrow -\frac{n}{m}>0$，即$mn<0$，

$\therefore$“$mn<0$”是“抛物线$mx^2+ny=0$的焦点在 y 轴正半轴上”的充要条件.

故选：C.

抛物线$mx^2+ny=0$的焦点在 y 轴正半轴上$\Leftrightarrow -\frac{n}{m}>0$，即可判断出结论.

本题考查了简易逻辑的判定方法、抛物线的标准方程、不等式的性质，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

4.【答案】A

【解析】解：λ为实数，已知向量$\vec{m}=(-1,2)$，$\vec{n}=(1,\lambda)$，

若$\vec{m}\perp\vec{n}$，则$-1\times 1+2\lambda=0$，解得$\lambda=\frac{1}{2}$，

所以$\vec{n}=(1,\frac{1}{2})$，$\vec{m}+2\vec{n}=(1,3)$，

设$\overrightarrow{m}+2\overrightarrow{n}$与$\overrightarrow{m}$之间的夹角为$\theta$，

则$(\overrightarrow{m}+2\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{m}=\overrightarrow{m}^2+2\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}=5+0=5$，

再根据$(\overrightarrow{m}+2\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{m}=|\overrightarrow{m}+2\overrightarrow{n}|\cdot|\overrightarrow{m}|\cdot cos\theta=\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}\cdot cos\theta$，

所以$\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}\cdot cos\theta=5$，求得$cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

由$0\leq\theta\leq\pi$，

所以$\theta=\frac{\pi}{4}$，

故选：A.

由题意利用两个向量垂直的性质，两个向量的数量积的定义和公式，求出向量$\overrightarrow{m}+2\overrightarrow{n}$与$\overrightarrow{m}$之间的夹角的余弦值，可得向量$\overrightarrow{m}+2\overrightarrow{n}$与$\overrightarrow{m}$之间的夹角.

本题主要考查两个向量垂直的性质，两个向量的数量积的定义和公式，属于基础题.

5.【答案】A

【解析】解：设“宫”的频率为a，由题意经过一次“损”，可得“徵”的频率为$\frac{3}{2}a$，

“徵”经过一次“益”，可得“商”的频率为$\frac{9}{8}a$，

“商”经过一次“损”，可得“羽”频率为$\frac{27}{16}a$，最后“羽”经过一次“益”，可得“角”的频率是$\frac{81}{64}a$，

由于a，$\frac{9}{8}a$，$\frac{81}{64}a$成等比数列，所以“宫、商、角”的频率成等比数列，

故选：A.

根据文化知识，分别求出相对应的概率，即可判断.

本题考查了等比数列的应用，考查了分析问题解决问题的能力，属于基础题.

6.【答案】B

【解析】解：根据函数$f(x)=Asin(\omega x+\varphi)$的部分图象，

可得它的一个对称中心的横坐标为$x=\frac{-\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}}{2}=-\frac{\pi}{12}$，

故它的一条对称轴为$x=\frac{-\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{12}}{2}=-\frac{11\pi}{24}$，

另一条为$x=\frac{-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{7\pi}{24}$，

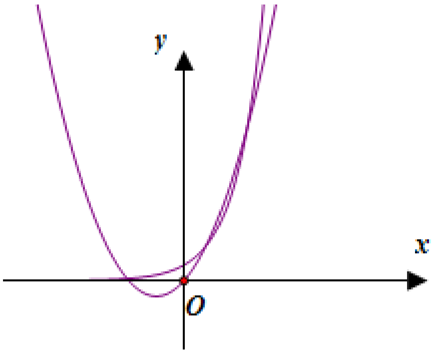
故选：B.

由题意先求出图象的一个对称中心，再由题意根据正弦函数的图象的对称性，求得它的对称轴.

本题主要考查正弦函数的图象的对称性，属于基础题.

7.【答案】B

【解析】解：作出函数$y=e^x$与函数$y=x^2+2x$的图象如下图所示，



由图象可知，函数$y=e^x$与函数$y=x^2+2x$的图象有 3 个交点，则函数$f(x)=e^x-x^2-2x$有 3 个零点，

观察选项可知，只有选项 B 符合题意.

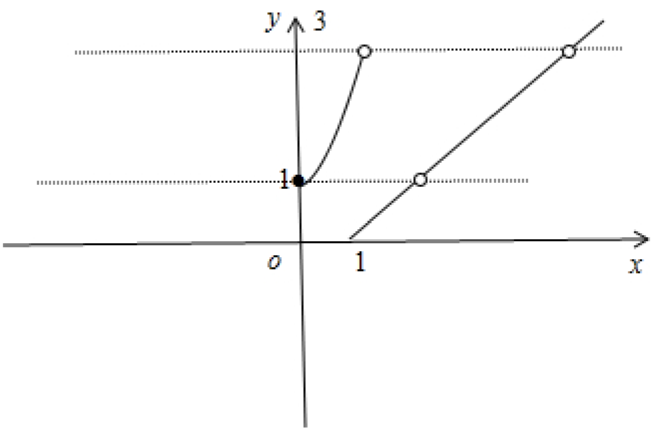
故选：B.

通过图象，判断函数$y=e^x$与函数$y=x^2+2x$的图象交点个数，进而求得函数$f(x)$的零点个数，结合选项即可得解.

本题考查函数图象的运用，考查数形结合思想，属于基础题.

8.【答案】D

【解析】解：画出函数$f(x)$图象如图所示：



令$y=f(x)-k=0$，可得$f(x)=k$，

即$y=f(x)$和$y=k$有两个不同的交点根据图象可知：

$k\in[1,e)$，由$e^{x_1}=x_2-1=k$得$x_1=lnk$，$x_2=k+1$，

所以$(x_2-x_1)\cdot f(x_1)=k^2+k-klnk$，

构造函数$h(k)=k^2+k-klnk(k\in[1,e))$，

由于$h'(k) = 2k - lnk$，$h''(k) = 2 - \frac{1}{k} > 0$，$k \in [1,e)$，

所以$k \in [1,e)$时$h'(k)$递增，因为$h'(k) \geq h'(1) = 2 > 0$，

所以$h(k)$在$k \in [1,e)$时递增，所以$h(k) \in [2,e^2)$，

故选：D.

画出函数$f(x)$的图象，根据$y = f(x) - k = 0$有两个零点，求得 k 的取值范围，用 k 表示x_1，x_2，代入所求表达式，由此构造函数$h(k)$，利用$h(k)$的导数求得其弟弟求解，由此可以求解.

本题考查了函数零点问题的求解，考查了利用导数研究函数的单调区间和最值，考查数形结合的数学思想，属于中档题.

9.【答案】AD

【解析】解：对于选项 A：$\because x^2 > 0$，$\therefore$由基本不等式可得$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$，当且仅当$x^2 = \frac{1}{x^2}$，即$x = 1$或$-1$时，等号成立，故选项 A 正确；

对于选项 B：$\because 0 < x < \frac{\pi}{2}$，$\therefore 0 < cosx < 1$，由基本不等式可得$cosx + \frac{1}{cosx} \geq 2$，当且仅当$cosx = \frac{1}{cosx}$，即$cosx = 1$时，等号成立，但是 cosx 取不到 1，所以等号不能成立，故选项 B 不正确；

对于选项 C：由基本不等式可得$f(x) = \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{(\sqrt{x^2+3})^2+1}{\sqrt{x^2+3}} = \sqrt{x^2+3} + \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \geq 2$，当且仅当$\sqrt{x^2+3} = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$，即$x^2 = -2$时，等号成立，显然不可能取到，故选项 C 不正确；

对于选项 D：$\because 3^x > 0$，$\therefore$由基本不等式可得$f(x) = 3^x + \frac{4}{3^x} - 2 \geq 2\sqrt{4} - 2 = 2$，当且仅当$3^x = \frac{4}{3^x}$，即$x = \log_3 2$时，等号成立，故选项 D 正确.

故选：AD.

利用基本不等式即可判断出结果，但一定要注意验证等号是否能够成立.

本题主要考查了基本不等式的运用，做题时一定要注意基本不等式成立的三个条件“一正、二定、三相等”缺一不可，是基础题.

10.【答案】BD

【解析】解：令圆中$y = 0$，可得$x = \pm 2\sqrt{5}$，由题意可得双曲线的焦点坐标为：$(\pm 2\sqrt{5}, 0)$，且双曲线的渐近线的方程为：$y = \pm \frac{b}{a}x$，代入圆的方程可得$x^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 = 20$，所以可得

$x=\pm\sqrt{\frac{20a^2}{a^2+b^2}}=\pm\frac{2\sqrt{5}a}{c}$，

由题意可得$M(\frac{2\sqrt{5}a}{c},\frac{2\sqrt{5}b}{c})$，$N(-\frac{2\sqrt{5}a}{c},\frac{2\sqrt{5}b}{c})$，

所以$\overrightarrow{ME}=(-\frac{2\sqrt{5}a}{c},3-\frac{2\sqrt{5}b}{c})$，$\overrightarrow{ON}=(-\frac{2\sqrt{5}a}{c},\frac{2\sqrt{5}b}{c})$，

因为$ME\perp ON$，所以$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，

即$(-\frac{2\sqrt{5}a}{c},3-\frac{2\sqrt{5}b}{c})\cdot(-\frac{2\sqrt{5}a}{c},\frac{2\sqrt{5}b}{c})=0$，

整理可得：$\frac{20a^2}{c^2}-\frac{20b^2}{c^2}+\frac{6\sqrt{5}b}{c}=0$，$c=2\sqrt{5}=\sqrt{a^2+b^2}$，

解得：$b=4$，$a=2$，

所以双曲线的方程为：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$；

可得虚轴长为 8，所以 A 不正确；

离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$，所以 B 正确；

渐近线的方程为：$y=\pm 2x$，所以 C 不正确；

可得$M(2,4)$，$N(-2,4)$，

则$S_{\triangle MON}=\frac{1}{2}|MN|\cdot y_N=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$，

所以 D 正确，

故选：BD.

由题意求出双曲线的焦点坐标，即求出 c 的值，求出双曲线的渐近线，与圆 O 的交点 M，N 的坐标，由$ME\perp ON$，可得数量积$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，再由 a，b，c 的关系，求出 a，b 的值，进而可得双曲线的方程，进而判断所给命题的真假.

本题考查双曲线的性质及直线与圆的交点的求法，属于中档题.

11.【答案】CD

【解析】解：样一列数：1，1，2，3，5，8，13，21，34 ...，其中从第三项起，每个数等于它前面两个数的和

对于 A：根据数据的规律，$a_8=21$，故 A 错误，

对于 B：$S_8=1+1+2+3+5+8+13+21=54$，故 B 错误；

对于 C：$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1+(a_3-a_1)+(a_4-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_{n-1})$，

即$S_n=-a_2+a_n+a_{n+1}=a_{n+2}-1$，

所以$S_{2020}=a_{2022}-1$，故 C 正确；

对于 D：$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2021}=a_2+(a_4-a_2)+(a_6-a_4)+\cdots+(a_{2022}-$

$a_{2020})=a_{2022}$，故 D 正确；

故选：CD.

直接利用数列的通项公式，数列的求和，相消法的应用判断 A、B、C、D 的结论.

本题考查的知识要点：数列的通项公式，相消法的应用，主要考查学生的运算能力和转换能力及思维能力，属于中档题.

12.【答案】AC

【解析】解：A 选项，取 AB 中点 G，连接 FG，A_1G，记A_1G与 AE 交点为 O，

在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=AB$，$\angle A_1AG=\angle ABE=\frac{\pi}{2}$,

因为 E，F 分别为BB_1，CD 中点，所以$AG=BE$，$FG//AD$，

因此$Rt\triangle A_1AG\cong Rt\triangle ABE$，所以$\angle AA_1G=\angle BAE$，$\angle A_1GA=\angle AEB$，

因此$\angle OAG+\angle OGA=\angle BAE+\angle A_1GA=\frac{\pi}{2}$，因此$\angle AOG=\frac{\pi}{2}$，即$AE\perp A_1G$，

又在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AD\perp$平面ABB_1A_1，所以$FG\perp$平面ABB_1A_1，

因为$AE\subset$平面ABB_1A_1，所以$FG\perp AE$，

又$A_1G\cap FG=G$，$A_1G\subset$平面A_1FG，所以$A_1F\perp AE$，故 A 正确.

B 选项，因为在正方体中$AB//C_1D_1$，且$AB=C_1D_1$，

所以四边形ABC_1D_1为平行四边形，

因此$BC_1//AD_1$，又$BC_1\not\subset$平面AED_1，$AD_1\subset$平面AED_1，

所以$BC_1//$平面AED_1.

因此棱BC_1上的所有点到平面AED_1的距离都相等，

又 P 是棱BC_1上的动点，

所以三棱锥$P-AED_1$的体积始终为定值，故 B 错误.

C 选项，取B_1C_1的中点 M，连接 EM，MD_1，则$EM//BC_1$，且$EM=\frac{1}{2}BC_1$，

则$EM//AD_1$，

又正方体中，$AB=2$，所以$MD_1=AE=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

$BC_1=AD_1=2\sqrt{2}$，

因此$EM=\frac{1}{2}BC_1=\sqrt{2}$，

所以平面AED_1截正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$所得截面为等腰梯形EMD_1A，

因此该等腰梯形的高为$h=\sqrt{AM^2-(\frac{AD_1-EM}{2})^2}=\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

所以该截面的面积$S=\frac{1}{2}(AD_1+EM)\cdot h=\frac{9}{2}$，故 C 正确.

D 选项，设点A_1到平面AA_1D_1D的距离为 d，

因为$BB_1//$平面AA_1D_1D，

所以点 E 到平面AA_1D_1D的距离为$AB=2$，

即点 E 到平面AA_1D_1的距离为 2，

所以$V_{E-AA_1D_1}=\frac{1}{3}{}_{\triangle AA_1D_1}\times 2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot 2=\frac{4}{3}$,

在$\triangle AED_1$中，$AD_1=2\sqrt{2}$，$AE=\sqrt{5}$，$ED_1=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$，

所以$\cos\angle EAD_1=\frac{8+5-9}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，因此$\sin\angle EAD_1=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

所以$S_{EAD_1}=\frac{1}{2}\cdot AD_1\cdot AE\cdot\sin\angle EAD_1=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}=3$，

又$V_{E-AA_1D_1}=V_{A_1-AED_1}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle AED_1}\cdot d=\frac{4}{3}$，所以$d=\frac{4}{3}$,

即点A_1到平面AED_1的距离为$\frac{4}{3}$，故 D 错误．

故选：AC．

A 选项，取 AB 中点为 G，连接 FG，A_1G，记A_1G与 AE 交点为 O，根据线面垂直的判定定理，可得$AE\perp$平面A_1FG，进而可得$A_1F\perp AE$．

B 选项，证明$BC_1//$平面AED_1，即可判定 B 错．

C 选项，补全截面，得到平面AED_1截正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$所得的截面为等腰梯形，进而可根据题中条件，求出截面积．

D 选项，根据等体积法，由$V_{E-AA_1D_1}=V_{A_1-AED_1}$，求出点到 Ian 的距离，即可判定．

本题考查立体几何中，直线与直线位置关系，点到直线的距离，体积，截面积，解题中注意等体积法的应用，属于中档题．

13.【答案】240

【解析】解：二项式$(2x-\frac{1}{\sqrt{x}})^6$的展开式的通项公式为

$T_{r+1}=C_6^r\cdot(2x)^{6-r}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{x}})^r=2^{6-r}\cdot C_6^r\cdot(-1)^r\cdot x^{6-\frac{3r}{2}}$,

令$6-\frac{3r}{2}=3$可得$r=2$，

$\therefore$二项式$(2x-\frac{1}{\sqrt{x}})^6$的展开式中$x^3$的系数为：$(-1)^2\cdot C_6^2\cdot 2^4=240$．

故答案为：240．

利用二项式展开式的通项公式，令 x 的幂指数等于 3，求得 r 的值即可．

本题考查了二项式展开式的通项公式应用问题，是基础题．

14.【答案】$\frac{4}{5}$

【解析】解：$\because \alpha$、β均为锐角，且$sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$，故$cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{98}}{10}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，

$\therefore sin2\alpha=2sin\alpha cos\alpha=\frac{7}{25}$，$cos2\alpha=2cos^2\alpha-1=\frac{24}{25}$.

$\because \cos(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore sin2(\alpha+\beta)=2sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$，$cos2(\alpha+\beta)=2cos^2(\alpha+\beta)-1=\frac{3}{5}$，

则$cos2\beta=\cos[2(\alpha+\beta)-2\alpha]=cos2(\alpha+\beta)cos2\alpha+sin2(\alpha+\beta)sin2\alpha=\frac{3}{5}\times\frac{24}{25}+\frac{4}{5}\times\frac{7}{25}=\frac{4}{5}$，

故答案为：$\frac{4}{5}$.

先求出$sin2\alpha$和$cos2\alpha$的值，再求出$sin2(\alpha+\beta)$和$cos2(\alpha+\beta)$的值，再利用两角和差的三角公式求出$cos2\beta=\cos[2(\alpha+\beta)-2\alpha]$的值.

本题主要考查同角三角函数的基本关系，二倍角公式、两角和差的三角公式的应用，属于中档题.

15.【答案】$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】

本题考查双曲线的性质和应用，解题时要认真审题，注意向量共线的合理运用.

设出过焦点的直线方程，与双曲线的渐近线方程联立把A，B表示出来，再由$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，求出$a$，$b$，$c$的关系，然后求双曲线的离心率.

【解答】

解：设$F(c,0)$，

则C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点且斜率为$\frac{a}{b}$直线$l$：$y=\frac{a}{b}(x-c)$，

而渐近线的方程是：$y=\pm\frac{b}{a}x$.

由$\begin{cases}y=\frac{a}{b}(x-c)\\y=-\frac{b}{a}x\end{cases}$，得$B\left(\frac{a^2}{c},-\frac{ab}{c}\right)$.

由$\begin{cases}y=\frac{a}{b}(x-c)\\y=\frac{b}{a}x\end{cases}$，得$A\left(\frac{a^2c}{a^2-b^2},\frac{abc}{a^2-b^2}\right)$.

$\because \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$，

$\therefore \frac{abc}{a^2-b^2} = 2 \cdot \frac{ab}{c}$，

可得：$a^2 = 3b^2$，

则双曲线 C 的离心率为$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故答案为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

16.【答案】$\frac{2}{3}$ $\frac{16\pi}{27}$

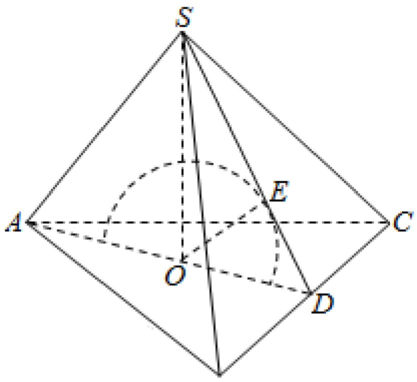
【解析】解：该六面体是由两个全等的正四面体组合而成，正四面体的棱长为$\sqrt{2}$，

如图，在棱长为$\sqrt{2}$的正四面体$S-ABC$中，

取 BC 中点 D，连结 SD、AD，

作$SO\perp$平面 ABC，垂足 O 在 AD 上，

则$AD = SD = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$，$OD = \frac{1}{3}AD = \frac{\sqrt{6}}{6}$，$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$，



$\therefore$该六面体的体积：

$V = 2V_{S-ABC} = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}$.

当该六面体内有一球，且该球体积取最大值时，球心为 O，且该球与 SD 相切，

过球心 O 作$OE\perp SD$，则 OE 就是球半径，

$\because SO \times OD = SD \times OE$，

$\therefore$球半径$R = OE = \frac{SO \times OD}{SD} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$，

$\therefore$该球表面积的最大值为：$S_{球} = 4\pi \cdot (\frac{2\sqrt{3}}{9})^2 = \frac{16\pi}{27}$.

故答案为：$\frac{2}{3}$，$\frac{16\pi}{27}$.

该六面体是由两个全等的正四面体组合而成，正四面体的棱长为 1，在棱长为 1 的正四面体$S-ABC$中，取 BC 中点 D，连结 SD、AD，作$SO\perp$平面 ABC，垂足 O 在 AD 上，求出$AD = SD = \frac{\sqrt{6}}{2}$，$OD = \frac{1}{3}AD = \frac{\sqrt{6}}{6}$，$SO = \frac{2\sqrt{3}}{3}$，该六面体的体积$V = 2V_{S-ABC}$；当该六面体内有一球，且该球表面积取最大值时，球心为 O，且该球与 SD 相切，过球心 O 作 $OE\perp SD$，则 OE 就是球半径，由此能求出该球表面积的最大值.

本题考查六面体的体积及其内接球的最大表面积的求法，考查空间中线线、线面、面面

间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，是中档题．

17.【答案】解：(1)由余弦定理可得$b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+b^2-c^2+c^2+a^2-b^2}{2a}=a=2=-4cosA$，

即$cosA=-\frac{1}{2}$，

由$0<A<\pi$，可得$A=\frac{2\pi}{3}$；

(2)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bcsinA=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

则$bc=\frac{4}{3}$，

由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bccosA=(b+c)^2-2bc-2bc\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$

$=(b+c)^2-bc=4$，

即$b+c=\sqrt{4+\frac{4}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

则$\triangle ABC$的周长为$2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$．

【解析】(1)运用余弦定理和特殊角的三角函数值，可得所求角；

(2)由三角形的面积公式和余弦定理，可得$c+b$，进而得到三角形的周长．

本题考查三角形的余弦定理和面积公式的运用，考查方程思想和运算能力，属于中档题．

18.【答案】解：(I)由题意，设等差数列公差为$d>0$，等比数列公差为q，

$\because a_2=b_2$，$a_5=b_3$，$a_{14}=b_4$．

$\therefore 1+d=b_1q$，$1+4d=b_1q^2$，$1+13d=b_1q^3$．

解得：$q=3$，$d=2$，$b_1=1$，

所以，等差数列的通项公式为$a_n=1+2(n-1)=2n-1$，

等比数列的通项公式为$b_n=3^{n-1}$．

$(II)a_n\cdot b_n=(2n-1)\cdot 3^{n-1}$．

$\therefore$数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前n项和$T_n=1+3\times3+5\times3^2+\cdots\ldots+(2n-1)\cdot3^{n-1}$．

$\therefore 3T_n=3+3\times3^2+\cdots\ldots+(2n-3)\times3^{n-1}+(2n-1)\cdot3^n$，

$\therefore -2T_n=1+2(3+3^2+\cdots\ldots+3^{n-1})-(2n-1)\cdot3^n=1+2\times\frac{3^{n-1}-1}{3-1}-(2n-1)\cdot3^n$，

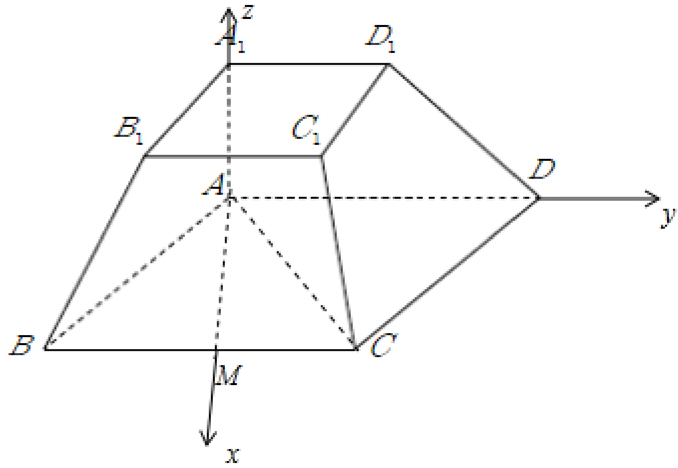
化为：$T_n=(n-1)\cdot3^n+1$．

【解析】(I)由题意，设等差数列公差为$d>0$，等比数列公差为q，由$a_2=b_2$，$a_5=b_3$，$a_{14}=b_4$.可得$1+d=b_1q$，$1+4d=b_1q^2$，$1+13d=b_1q^3$.解出即可得出．

$(II)a_n \cdot b_n = (2n-1) \cdot 3^{n-1}$.利用错位相减法即可得出．

本题考查了等差数列与等比数列的通项公式与求和公式、错位相减法，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

19.【答案】(1)证明：取 BC 中点 M，连接 AM，



$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\angle ABC = 60°$，

$\therefore \triangle ABC$是等边三角形，

$\therefore AM \perp BC$，

$\therefore AM \perp AD$，

又$AA_1 \perp$平面 $ABCD$，

$\therefore AM$，AD，AA_1两两垂直，

$\because$四棱台$ABCD - A_1B_1C_1D_1$，$\therefore$四边形 $ABCD$∽四边形$A_1B_1C_1D_1$，

$\therefore$四边形$A_1B_1C_1D_1$是菱形，$A_1D_1 = A_1B_1 = 1$，

以 A 为原点，以 AM，AD，AA_1为坐标轴建立空间直角坐标系$A - xyz$，如图所示，

则$A(0,0，0)$，$D(0,2，0)$，$C(\sqrt{3},1，0)$，$D_1(0,1，1)$，

若 E 为 BC 得中点，则$E(\sqrt{3},0，0)$，

$\therefore \overrightarrow{AE} = (\sqrt{3},0，0)$，$\overrightarrow{AD_1} = (0,1，1)$，$\overrightarrow{CD} = (-\sqrt{3},1，0)$，$\overrightarrow{DD_1} = (0,-1,1)$，

设平面AD_1E的法向量为$\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$，则$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0 \end{cases}$，即$\begin{cases} \sqrt{3}x_1 = 0 \\ y_1 + z_1 = 0 \end{cases}$，

令$z_1 = 1$可得$\vec{m} = (0,-1,1)$，

设平面CDD_1C_1的法向量为$\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$，则$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DD_1} = 0 \end{cases}$，即$\begin{cases} -\sqrt{3}x_2 + y_2 = 0 \\ -y_2 + z_2 = 0 \end{cases}$，

令$x_2 = 1$可得$\vec{n} = (1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$，

$\therefore \vec{m} \cdot \vec{n} = 0 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$，$\therefore \vec{m} \perp \vec{n}$，

$\therefore$平面平面$AD_1E \perp$平面CC_1D_1D.

(2)解：设$E(\sqrt{3},m，0)$，$-1 \le m \le 1$，则$\overrightarrow{AE} = (\sqrt{3},m，0)$，

设平面EAD_1的法向量为$\overrightarrow{n_1} = (x_3, y_3, z_3)$，则$\begin{cases} \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0 \end{cases}$，即$\begin{cases} \sqrt{3}x_3 + my_3 = 0 \\ y_3 + z_3 = 0 \end{cases}$，

令$x_3 = m$可得$\overrightarrow{n_1} = (m, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$，

$\because AM \perp$平面ADD_1A_1，$\therefore \overrightarrow{n_2} = (1,0，0)$为平面$ADD_1$的一个法向量，

$\therefore \cos < \overrightarrow{n_1}，\overrightarrow{n_2} > = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \frac{m}{\sqrt{m^2+6} \times 1} = \frac{m}{\sqrt{m^2+6}}$，

$\therefore |cos\theta| = \frac{|m|}{\sqrt{m^2+6}} = \frac{1}{3}$，解得$m = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又$CM=1$，$\therefore CE=1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【解析】(1)取 BC 中点 M，证明$AM\perp AD$，建立空间直角坐标系$A-xyz$，求出平面AD_1E和平面CC_1D_1D的法向量，证明法向量垂直得出两平面垂直；

(2)设$E(\sqrt{3},m,0)$，求出平面AD_1E的法向量$\overrightarrow{n_1}$和平面ADD_1A_1的法向量$\overrightarrow{n_2}$，令$|\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>|=\frac{1}{3}$计算 m，从而得出 CE 的长.

本题考查了面面垂直的判定，考查空间向量与空间位置关系、空间角的计算，属于中档题.

20.【答案】解：(1) $\because \xi$服从正态分布$N(270,5^2)$，

$\therefore P(260,275]=\frac{P(260,280)-P(265,275)}{2}=\frac{0.9644-0.6826}{2}=0.1359$，

$\therefore$质量指标在$(260,265]$内的排球个数约为$1000\times 0.1359\approx 136$个；

(2)(▯)前三场赢两场，第四场必赢，$f(p)=C_3^2p^3(1-p)$，

因此$f'(p)=3[3p^2(1-p)+p^3(-1)]=3p^2(3-4p)$.

令$f'(p)=0$，得$p=\frac{3}{4}$，

当$p\in(0,\frac{3}{4})$时，$f'(p)>0$，$f(p)$在$(0,\frac{3}{4})$上为增函数；

当$p\in(\frac{3}{4},1)$时，$f'(p)<0$，$f(p)$在$(\frac{3}{4},1)$上为减函数.

$\therefore f(p)$的最大值点$p_0=\frac{3}{4}$，

从而$p_0=\frac{3}{4}$，

(▯)X的可能取值为 3，2，1，0，

$P(X=3)=(\frac{3}{4})^3+C_3^2\times(\frac{3}{4})^3\times\frac{1}{4}=\frac{189}{256}$，$P(x=2)=C_4^2\times(\frac{3}{4})^3\times(\frac{1}{4})^2=\frac{81}{512}$，

$P(X=1)=C_4^2\times(\frac{3}{4})^2\times(\frac{1}{4})^5=\frac{27}{512}$，

$P(X=0)=(\frac{3}{4})^3+C_3^1\times(\frac{3}{4})\times(\frac{1}{4})^3=\frac{13}{256}$.

$\therefore X$的分布列：

X	3	2	1	0
P	$\frac{189}{256}$	$\frac{81}{512}$	$\frac{27}{512}$	$\frac{13}{256}$

【解析】(1)由已知结合2σ原则求得$P(260,265]$，乘以 1000 求得质量指标在$(260,265]$内的排球个数；

(2)(ⅰ)写出概率函数，利用导数求最值即可得到$f(p)$的最大值点p_0；

(ⅱ)求出 X 的可能取值为 3，2，1，0，再求出相应的概率，可得 X 的分布列．

本题考查概率的求法，考查离散型随机变量的分布列的求法，考查导数性质、n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次概率计算公式等基础知识，考查运算求解能力，是中档题．

21.【答案】解：(1)由题意，$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ ab=2\sqrt{3}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\\ c=1\end{cases}$，

$\therefore a=2$，$b=\sqrt{3}$；

(2)点 Q 总在直线$x=\frac{2}{3}$上．

证明如下：由(1)可得，椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

由题意可得直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为$y=k(x-6)$，

代入椭圆方程，整理得$(3+4k^2)x^2-48k^2x+144k^2-12=0$，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=\frac{48k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{144k^2-12}{3+4k^2}$，

设$Q(x_0,y_0)$，由$|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{BQ}|=|\overrightarrow{AQ}|\cdot|\overrightarrow{BP}|$，得：

$(6-x_1)(x_0-x_2)=(x_1-x_0)(6-x_2)$(考虑线段在 x 轴上的射影即可)，

$\therefore 12x_0=(6+x_0)(x_1+x_2)-2x_1x_2$，

于是$12x_0=(6+x_0)\cdot\frac{48k^2}{3+4k^2}-\frac{288k^2-24}{3+4k^2}$，

整理得$x_0=\frac{2}{3}$，

$\therefore$点 Q 总在直线$x=\frac{2}{3}$上．

【解析】(1)由题意可得关于 a，b，c 的方程组，求解可得 a，b 的值；

(2)设直线 l 的方程为$y=k(x-6)$，代入椭圆方程，得关于 x 的一元二次方程，利用根与系数的关系结合已知向量等式即可证明点 Q 总在定直线$x=\frac{2}{3}$上．

本题考查椭圆方程的求法，考查椭圆的简单性质，考查推理论证与运算求解能力，考查化归与转化思想，是中档题．

22.【答案】解：(1)$a=2$时，$f(x)=e^x+2e^{-x}-x-2$，

则$f'(x)=e^x-2e^{-x}-1$，$f''(x)=e^x+2e^{-x}>0$，

故$f'(x)$在 R 递增，而$f'(ln2)=0$，

故$f(x)$在$(-\infty,ln2)$递减，在$(ln2,+\infty)$递增；

$(2)f(x)=e^x+ae^{-x}+(1-a)x-2$，

则$f'(x)=e^x-ae^{-x}+(1-a)$，$f''(x)=e^x+ae^{-x}$，

$\because a\geq 1$，$\therefore f''(x)>0$，$f'(x)$在 R 递增，

而$f'(lna)=e^{lna}-ae^{-lna}+1-a=0$，

故$f(x)$在$(-\infty,lna)$递减，在$(lna,+\infty)$递增，

故$f(x)_{min}=f(lna)=a+1+(1-a)lna-2$，

若$f(x)$有两个不同的零点，

则$f(x)_{min}=f(lna)=a+1+(1-a)lna-2<0$，

解得：$a>e$，

故 a 的取值范围是$(e,+\infty)$.

【解析】(1)代入 a 的值，求出函数的导数，根据导函数的符号，求出函数的单调区间即可；

(2)求出函数的导数，根据函数的单调性求出$f(x)$的最小值，得到关于 a 的不等式，解出即可.

本题考查了函数的单调性，最值问题，考查导数的应用以及转化思想，是一道常规题.