分析三:条件结论中都有$\sqrt{2}$ + 某数的形式,可以考虑构造函数

解法四:(构造函数)

令 $f(x)=(1+\sqrt{2})x^{\frac{1}{1+\sqrt{2}}}-(x+\sqrt{2}),(x>0)$,则 $f'(x)=x^{\frac{1}{1+\sqrt{2}}-1}-1$.所以,$f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增,$(1,+\infty)$ 单调递减,$f(x)\leqslant f(1)=0$.即 $x+\sqrt{2}\geqslant(1+\sqrt{2})x^{\frac{1}{1+\sqrt{2}}},(x>0)$. 分别令 $x=x_1,x_2,\cdots,x_n$, 得

$$\begin{cases}(x_1+\sqrt{2})\geqslant(1+\sqrt{2})x_1^{\frac{1}{1+\sqrt{2}}}\\(x_2+\sqrt{2})\geqslant(1+\sqrt{2})x_2^{\frac{1}{1+\sqrt{2}}}\\\cdots\\(x_n+\sqrt{2})\geqslant(1+\sqrt{2})x_n^{\frac{1}{1+\sqrt{2}}}\end{cases}$$

将这 n 个式子相乘即得.

(河北省邯郸市第一中学　师文亮　056002)

对一道联赛“圆”题的类比

联赛题　如图 1,已知圆 $O:x^2+y^2=1$ 与 x 轴交于 A,B 两点、与 y 轴交于点 C,M 是圆 O 上任一点(除去圆 O 与两坐标轴的交点).直线 AM 与 BC 交于点 P,直线 CM 与 x 轴交于点 N,设直线 PM,PN 的斜率分别为 m,n,求证:$m-2n$ 为定值.

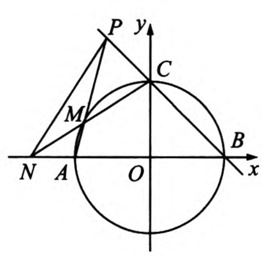

图1

这是 2014 年全国高中数学联赛陕西预赛试题第二试的第四大题,可求得 $m-2n=1$ 为定值,将圆的这一性质类比到椭圆可提出如下问题:

类比探究:如图 2,已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与 x 轴交于 A,B 两点、与 y 轴交于点 C,M 是椭圆上任一点(除去椭圆与两坐标轴的交点).直线 AM 与 BC 交于点 P,直线 CM 与 x 轴交于点 N,设直线 PM,PN 的斜率分别为 m,n,探究:$m-2n$ 是否为定值?

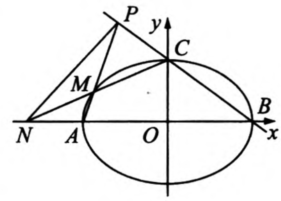

图2

解:因为点 M 在椭圆上且不是椭圆与两坐标轴的交点,故可设其坐标为$(a\cos\theta,b\sin\theta)$,$\theta\in(0,2\pi)$ 且 $\theta\neq\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$.因为 C,M,N 三点共线,所以 $\overrightarrow{CN}\,/\!/\,\overrightarrow{CM}$,而 $\overrightarrow{CN}=(x_N,-b)$,$\overrightarrow{CM}=(a\cos\theta,b\sin\theta-b)$,于是有 $x_N(b\sin\theta-b)=-ab\cos\theta$,因为 $\sin\theta\neq1$,所以 $x_N=\frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta}$.直线 CB 的点斜式方程为:$y=-\frac{b}{a}(x-a)$①.直线 AM 的点斜式方程为:$y=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta+a}(x+a)$②.由①②得 $\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta+a}(x+a)=-\frac{b}{a}(x-a)$,所以$(x+a)\sin\theta+(x-a)(1+\cos\theta)=0$,所以$(1+\cos\theta+\sin\theta)x=a(1+\cos\theta-\sin\theta)$,即 $(2\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})x=a(2\cos^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})$, 即 $(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})x=a(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})$,所以$(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2})x=a(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})^2$, 即 $x\cos\theta=a(1-\sin\theta)$,所以 $x=\frac{a(1-\sin\theta)}{\cos\theta}$.将其代入①得

$y = -\frac{b}{a} \cdot \frac{a(1-\cos\theta-\sin\theta)}{\cos\theta} = \frac{b(\cos\theta+\sin\theta-1)}{\cos\theta}$. 故点 P 的坐标为 $x_P = \frac{a(1-\sin\theta)}{\cos\theta}, y_P = \frac{b(\cos\theta+\sin\theta-1)}{\cos\theta}$.

所以 $m = k_{PA} = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \dfrac{\frac{b(\cos\theta+\sin\theta-1)}{\cos\theta}}{\frac{a(1-\sin\theta)}{\cos\theta}+a} = -\frac{b(1-\cos\theta-\sin\theta)}{a(1+\cos\theta-\sin\theta)}$

$= -\frac{b(1-\cos\theta-\sin\theta)}{a(1+\cos\theta-\sin\theta)} = \dfrac{b(2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})}{a(2\cos^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})} = \frac{b}{a}\tan\theta$.

$n = k_{PN} = \frac{y_P - y_N}{x_P - x_N} = \dfrac{\frac{b(\cos\theta+\sin\theta-1)}{\cos\theta}}{\frac{a(1-\sin\theta)}{\cos\theta} - \frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta}} = \frac{b(1-\cos\theta-\sin\theta)}{a\cos\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{b(1-\cos\theta-\sin\theta)}{2a\sin\theta} = \dfrac{b(2\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})}{4a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{b}{2a}(\tan\theta - 1)$.

所以 $m - 2n = \frac{b}{a}\tan\theta - \frac{b}{a}(\tan\theta - 1) = \frac{b}{a}$.

由上述探究过程可知，结论 $m - 2n = \frac{b}{a}$ 对 a, b 的大小关系无关，于是我们有如下更一般性结论：

定理　已知曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 与 x 轴交于 A, B 两点、与 y 轴交于点 C，M 是曲线 Γ 上任意一点（除去 Γ 与两坐标轴的交点）. 直线 AM 与 BC 交于点 P，直线 CM 与 x 轴交于点 N，设直线 PM, PN 的斜率分别为 m, n，则 $m - 2n = \frac{b}{a}$.

特别地，当 $a = b = 1$ 时，就是上述联赛试题，$m - 2n = 1$.

至此，笔者又联想到 2013 年高考江西卷文科第 20 题. 实际上，这道高考题是上述定理在椭圆中的一个特殊情形，题目如下：

高考题　椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$a + b = 3$.（1）求椭圆 C 的方程；（2）如图 3，A, B, D 是椭圆 C 的顶点，P 是椭圆 C 上除顶点外的任意点，直线 DP 交 x 轴于点 N 直线 AD 交 BP 于点 M，设 BP 的斜率为 k，MN 的斜率为 m，证明 $2m - k$ 为定值.

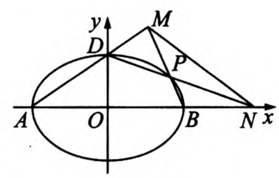

图3

可求得（1）椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.（2）这里 $a = 2, b = 1$，注意到高考题与竞赛题条件的不同，结论应为 $2m - k = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ 为定值.

（湖北省阳新县高级中学　邹生书　435200）

一类三角函数值域有有理解的命制策略

众所周知，$\frac{a\sin\theta - b}{c\cos\theta - d}$ 型值域问题可以转化为从单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 外一点 $Q(x_Q, y_Q)$ 向该单位圆上任一点所作直线的斜率的取值范围，但一般这类题目的答案都是无理解，学生做完后难免心里打鼓. 为什么会出现