

高三数学练习卷参考答案

一、填空题

1. $(1, 2)$ 2. $\sqrt{3}$ 3. 48 4. 7 5. $1 - \frac{\pi}{8}$ 6. $\frac{\pi}{2}$
7. 8 8. $\sqrt{2}$ 9. 4 10. $\frac{1}{3}$ 11. $\frac{\pi}{3}$ 12. $[2, 6]$
13. $5 - 2\sqrt{13}$ 14. $\frac{1}{5}$

解答与提示:

1. $A = (0, 2)$, $B = (1, +\infty)$, 所以 $A \cap B = (1, 2)$.

2. $|z| = \left| \frac{a-i}{2i} \right| = \frac{|a-i|}{|2i|} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{2} = 1 \Rightarrow a^2 = 3$, 因为 $a > 0$, 所以 $a = \sqrt{3}$.

3. $1 - (0.0125 + 0.0375) \times 5 = \frac{3}{4}$, $\frac{12}{\frac{3}{4} \times \frac{2}{1+2+3}} = 48$.

4. 执行第一次循环后 $S = 3$, $k = 3$; 执行第二次循环后 $S = 9$, $k = 5$;
执行第三次循环后 $S = 45$, $k = 7$; 终止循环.

5. $P = \frac{2 \times 4 - \pi}{2 \times 4} = 1 - \frac{\pi}{8}$.

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理, $\frac{\sin A}{a} = \frac{\cos C}{b} \Rightarrow \frac{\sin A}{\sin A} = \frac{\cos C}{\sin B} \Rightarrow \frac{\cos C}{\sin B} = 1$,
 $\Rightarrow \cos C > 0$, 又 $a > b \Rightarrow A > B$, 所以 $B \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - C)}{\sin B} = 1 \Rightarrow A = (\pi - B - C) = \frac{\pi}{2}.$$

7. 由 $a_2 a_4 = 4(a_3 - 1)$, 得 $a_3^2 = 4(a_3 - 1)$, 得 $a_3 = 2$, 所以 $a_5 = \frac{a_3^2}{a_1} = 8$.

8. $f(0) = 3$, $f[f(0)] = f(3) = \log_a 2 = 2$, 所以 $a = \sqrt{2}$.

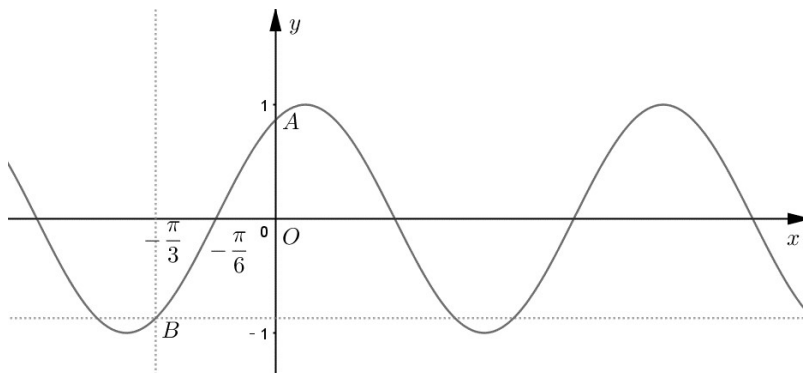
9. 设圆柱底面的半径为 r , 则 $V = \pi r^2 \cdot 6r = 3 \cdot \frac{4\pi r^3}{3} + \pi r^2 \cdot 8$, 即 $2\pi r^3 = 8\pi r^2$, 解得 $r = 4$.

10. 法一: 设 $p(-m, -n)$, $Q(m, n)$, 又 $A(a, 0)$, $F(c, 0)$, $M(\frac{a-m}{2}, -\frac{n}{2})$,

$$\overrightarrow{FQ} \parallel \overrightarrow{FM} \Rightarrow (m-c, n) \parallel \left(\frac{a-m}{2}-c, -\frac{n}{2}\right) \Rightarrow -\frac{n}{2}(m-c) = n\left(\frac{a-m}{2}-c\right) \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}.$$

法二：连结 AQ ，则 F 是 $\triangle APQ$ 的重心，下略.

11. 不妨设 $x_1 < 0 < x_2$ ，则 $|x_2 - x_1| = x_2 - x_1$ ，由图可知 $x_2 - x_1 > 0 - (-\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$.



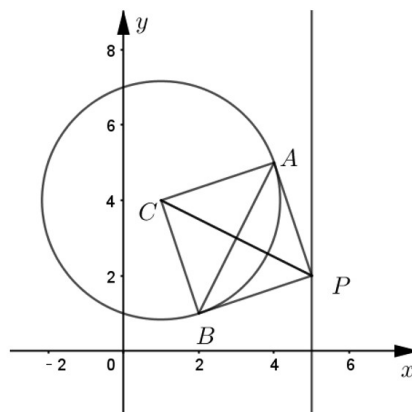
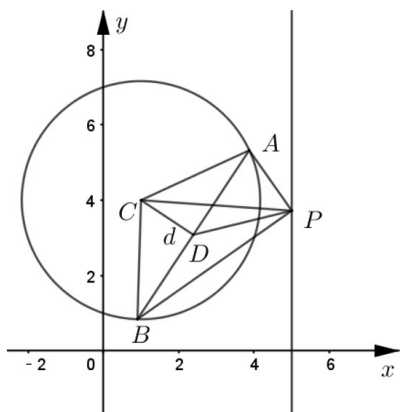
12. 如图

1, 设

$P(5, t)$ ，弦 AB 的中点为 D ，圆心 C 到的距离为 d ，可知 $AB = 2\sqrt{10 - d^2}$ ；

则由 $PC \leq PD + CD$ 得到 $PC \leq \frac{AB}{2} + CD = d + \sqrt{10 - d^2} \leq \sqrt{2(d^2 + 10 - d^2)} = \sqrt{20}$ ，

即 $\sqrt{4^2 + (t-4)^2} \leq \sqrt{20}$ ，解得 $t \in [2, 6]$ 。



法二：过点 $P(5, t)$ 作圆的两条切线，若满足 $\angle APB = \theta$ ，则 $\theta \geq 90^\circ$ 时适合题意，由

直线定理可知： $\frac{PC}{\sin 90^\circ} = \frac{\sqrt{10}}{\sin \frac{\theta}{2}}$ ，即 $PC = \frac{\sqrt{10}}{\sin \frac{\theta}{2}} \leq \sqrt{20}$ ，有 $\sqrt{4^2 + (t-4)^2} \leq \sqrt{20}$ ，

解得 $t \in [2, 6]$ 。

13. 以圆心为原点， AB 垂直平分线所在直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，

则 $A(-1, \sqrt{3})$, $C(2, \sqrt{3})$, 设 $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ ($\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$),

$$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA} = (2 - 2\cos\theta, \sqrt{3} - 2\sin\theta) \cdot (-1 - 2\cos\theta, \sqrt{3} - 2\sin\theta) = 5 - 2\cos\theta - 4\sqrt{3}\sin\theta$$

$$= 5 - 2\sqrt{3}\sin(\theta + \varphi), \text{ 其中 } 0 < \tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{6} < \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以 $0 < \varphi < \frac{\pi}{6}$, 当 $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ 时, $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$ 的最小值为 $5 - 2\sqrt{13}$.

14. 设 $u(x) = e^x - (x+1)$, 则 $u'(x) = e^x - 1$, 可知 $u(x) \geq u(0) = 0$, 即 $e^x \geq x+1$;

可知 $e^{a+c} + e^{2b-c-1} \geq a+c+1+2b-c = a+2b+1$, 当且仅当 $a+c = 2b-c-1 = 0$ 时, 取等;

$$\text{即 } e^{a+c} + e^{2b-c-1} = a+2b+1, \quad a+c = 2b-c-1 = 0,$$

$$\text{解得 } a^2 + b^2 = c^2 + \frac{(c+1)^2}{4} = \frac{5}{4}c^2 + \frac{c}{2} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{5}, \text{ 当且仅当 } c = \frac{1}{5} \text{ 时, 取等号.}$$

二、解答题

15. 解: (1) 因为 $a \parallel b$, 所以 $2\sin\theta = \cos\theta - 2\sin\theta$, 于是 $4\sin\theta = \cos\theta$; ... 3 分

当 $\cos\theta = 0$ 时, $\sin\theta = 0$, 与 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 矛盾, 所以 $\cos\theta \neq 0$,

$$\text{故 } \tan\theta = \frac{1}{4}, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{\sin\theta \cdot \cos\theta}{1+3\cos^2\theta} = \frac{\sin\theta \cdot \cos\theta}{\sin^2\theta + 4\cos^2\theta} = \frac{\tan\theta}{\tan^2\theta + 4} = \frac{4}{65}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(2) 由 $|a| = |b|$ 知, $\sin^2\theta + (\cos\theta - 2\sin\theta)^2 = 5$,

$$\text{即 } 1 - 4\sin\theta\cos\theta + 4\sin^2\theta = 5, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{从而 } -2\sin 2\theta + 2(1 - \cos 2\theta) = 4, \text{ 即 } \sin 2\theta + \cos 2\theta = -1,$$

$$\text{于是 } \sin(2\theta + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{又由 } 0 < \theta < \pi \text{ 知, } \frac{\pi}{4} < 2\theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi}{4},$$

$$\text{所以 } 2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \text{ 或 } 2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}, \text{ 因此 } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \theta = \frac{3\pi}{4}. \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

16. 证: (1) 连结 AC .

在平行四边形 $ABCD$ 中, 因为 O 是 BD 中点, 所以 O 是 AC 中点.

又 M 为 PC 中点, 所以 $OM \parallel PA$ 3 分

又 $OM \not\subset$ 平面 PAD , $PA \subset$ 平面 PAD , 所以 $OM \parallel$ 平面 PAD 6 分

(2) 连结 PO , 因为 $PB = PD$ 且 O 是 BD 中点, 所以 $PO \perp BD$.

又因为平面 $PBD \cap$ 平面 $ABCD = BD$, 平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$, $PO \subset$ 平面 PBD , 所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$ 9 分

又因为 $CD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $CD \perp PO$.

又 $CD \perp PC$, $PO \cap PC = P$, $PO \subset$ 平面 PAC , $PC \subset$ 平面 PAC ,

所以 $CD \perp$ 平面 PAC 11 分

又 $OM \subset$ 平面 PAC , 所以 $OM \perp CD$.

在平面 PAC 中, 由 (1) 得 $OM \parallel PA$,

又 $PA \perp PC$, 所以 $OM \perp PC$.

又 $CD \cap PC = C$, $PC \subset$ 平面 PCD , $CD \subset$ 平面 PCD ,

所以 $OM \perp$ 平面 PCD 14 分

17. 解: (1) 因为椭圆离心率为 $\frac{1}{2}$, 当 P 为 C 的短轴顶点时, $\triangle PF_1F_2$ 的面积有最大

值 $\sqrt{3}$.

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \\ \frac{1}{2} \times 2c \times b = \sqrt{3}, \end{cases} \quad \text{所以 } \begin{cases} a = 2, \\ b = \sqrt{3}, \\ c = 1, \end{cases} \quad \text{故椭圆 } C \text{ 的方程为: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \quad \cdots 4 \text{ 分}$$

(2) 设直线 PQ 的方程为 $y = k(x-1)$,

当 $k \neq 0$ 时, $y = k(x-1)$ 代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$,

得: $(3+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$ 6 分

设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 线段 PQ 的中点为 $N(x_0, y_0)$,

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4k^2}{3+4k^2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = k(x_0 - 1) = \frac{-3k}{3+4k^2},$$

即 $N(\frac{4k^2}{3+4k^2}, \frac{-3k}{3+4k^2})$ 8 分

因为 $TN \perp PQ$, 则 $k_{TN} \cdot k_{PQ} = -1$, 所以 $\frac{-3k}{\frac{4k^2}{3+4k^2}} \cdot \frac{1}{k} = -1$, 10 分

化简得 $4k^2 - 8k + 3 = 0$ ，解得 $k = \frac{1}{2}$ 或 $k = \frac{3}{2}$ ，

即直线 PQ 的斜率为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$ 。 14 分

18. 解：(1) 当 $\alpha = 60^\circ$ 时， $DE \parallel AC$ ， $DF \parallel AB$ ，四边形 $AEDF$ 是平行四边形， $\triangle BDE$

和 $\triangle CDF$ 均为边长为 1km 的等边三角形，面积都是 $\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ km}^2$ ，

所以绿化面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ km}^2$ 。 4 分

(2) 由题意知， $30^\circ < \alpha < 90^\circ$ ，在 $\triangle BDE$ 中， $\angle BED = 120^\circ - \alpha$ ，

由正弦定理得 $\frac{BE}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin(120^\circ - \alpha)}$ ，所以 $BE = \frac{\sin \alpha}{\sin(120^\circ - \alpha)}$ ，

在 $\triangle CDF$ 中， $\angle CDF = 120^\circ - \alpha$ ， $\angle CFD = \alpha$ ，

由正弦定理得 $\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{CF}{\sin(120^\circ - \alpha)}$ ，所以 $CF = \frac{\sin(120^\circ - \alpha)}{\sin \alpha}$ ， 8 分

所以 $BE + CF = \frac{\sin(120^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin(120^\circ - \alpha)} = \frac{\sin^2(120^\circ - \alpha) + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin(120^\circ - \alpha)}$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha\right)^2 + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha\right)} = \frac{\frac{5}{4} \sin^2 \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{3}{4} \cos^2 \alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha}$$

$$= 1 + \frac{\frac{3}{4}(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha} = 1 + \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2\alpha + \frac{1}{4}(1 - \cos 2\alpha)}$$

$$= 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sin(2\alpha - 30^\circ) + \frac{1}{2}}, \quad \text{..... 11 分}$$

$$\text{所以 } S(\alpha) = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BDE} - S_{\triangle CDF} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}(BE + CF)$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{1}{\sin(2\alpha - 30^\circ) + \frac{1}{2}} \quad (30^\circ < \alpha < 90^\circ),$$

当 $30^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时， $30^\circ < 2\alpha - 30^\circ < 150^\circ$ ，

$$\frac{1}{2} < \sin(2\alpha - 30^\circ) \leq 1, \quad 1 < \sin(2\alpha - 30^\circ) + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2},$$

$$\frac{2}{3} \leq \frac{1}{\sin(2\alpha - 30^\circ) + \frac{1}{2}} < 1, \quad \text{所以 } \frac{3\sqrt{3}}{8} < S(\alpha) \leq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

答：地块的绿化面积 $S(\alpha)$ 的取值范围是 $(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ 14 分

19. 解：(1) 当 $n=3$ 时, $A_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{3(a_1 + a_3)}{2}$,

因为 $a_1=1, a_3=5$, 所以 $a_2=3$ 3 分

(2) 由 $A_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$, 得 $A_{n+1} = \frac{(n+1)(a_1 + a_{n+1})}{2}$,

两式相减, 得 $a_{n+1} = \frac{a_1 + (n+1)a_{n+1} - na_n}{2}$, 即 $(n-1)a_{n+1} - na_n + a_1 = 0$,

所以 $na_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_1 = 0$,

两式相减, 得 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列. 8 分

(3) 依题意: $a_k = b_m = a_1 \cdot 2^{m-1}$, 由 $A_k = 86B_m$ 得: $\frac{a_1 + a_k}{2} \times k = 86 \times \frac{a_1 - qa_m}{1-q}$,

即 $\frac{a_1 + a_1 \cdot 2^{m-1}}{2} \times k = 86 \times \frac{a_1 - 2^m a_1}{1-2}$, $2^m = \frac{12 \times 86}{4 \times 86 - k} - 2$,

所以 $344 - k = \frac{516}{2^{m-1} + 1}$ 10 分

因为 $2^9 = 512$, 且 $m \geq 3$, 所以 $2 \leq m-1 \leq 9$,

又因为 $516 = 4 \times 129 = 4 \times 3 \times 43$, 且 $2^{m-1} + 1$ 为奇数, 12 分

所以 $2^{m-1} + 1 = 129$ 时, $\frac{516}{2^{m-1} + 1}$ 是整数, 此时 $m-1 = 7$,

所以 $m=8, k=340$ 16 分

20. 解：令 $h_1(x) = f(x) + g(x)$, $h_2(x) = f(x) \cdot g(x)$.

(1) 则 $h_1'(x) = 2x + a + 1$, $h_2'(x) = 3x^2 + 2ax + b$,

因为 $f(x) = x$ 与 $g(x) = x^2 + ax + b$ 是一对“P(1)函数”,

所以 $\begin{cases} h_1'(1) = a + 3 = 0, \\ h_2'(1) = 2a + 3 + b = 0, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} a = -3, \\ b = 3. \end{cases}$

此时，因 $h_2'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0$ ， $h_2(x)$ 无极小值，

故 $f(x) = x$ 与 $g(x) = x^2 + ax + b$ 不是一对“ $P(1)$ 函数”。…………… 4 分

(2) ① $h_1(x) = e^x + x^2 + ax + 1$ ， $h_2(x) = e^x \cdot (x^2 + ax + 1)$ ，

$h_1'(x) = e^x + 2x + a$ ， $h_2'(x) = e^x \cdot [x^2 + (a+2)x + a + 1] = e^x \cdot (x+1)(x+a+1)$ ，

若 $f(x) = e^x$ 与 $g(x) = x^2 + ax + 1$ 是一对“ $P(t)$ 函数”，

由 $h_2'(x) = e^x \cdot (x+1)(x+a+1) = 0$ ，得 $x_1 = -1$ ， $x_2 = -a-1$ ，…………… 6 分

1° 若 $a > 0$ ，则有

x	$(-\infty, -a-1)$	$-a-1$	$(-a-1, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
$h_2'(x)$	+	0	-	0	+
$h_2(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

因为 $h_2(x)$ 在 $x=t$ 处取得极小值，所以 $t = -1$ ，

从而 $h_1'(-1) = e^{-1} - 2 + a = 0$ ， $a = 2 - \frac{1}{e}$ 。

经验证知 $h_1(x) = e^x + x^2 + (2 - \frac{1}{e})x + 1$ 在 $x = -1$ 处取得极小值，所以 $\begin{cases} a = 2 - \frac{1}{e}, \\ t = -1. \end{cases}$

2° 当 $a < 0$ 时，则有

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, -a-1)$	$-a-1$	$(-1, +\infty)$
$h_2'(x)$	+	0	-	0	+
$h_2(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

因为 $h_2(x)$ 在 $x=t$ 处取得极小值，所以 $t = -a-1$ ；

从而 $h_1'(-a-1) = e^{-a-1} - a - 2 = 0$ ，

令 $\varphi(a) = e^{-a-1} - a - 2$ ， $a < 0$ ，

$\varphi(a)$ 在 $(-\infty, 0)$ 是减函数，且 $\varphi(-1) = 0$ ，所以 $a = -1$ ，从而 $\begin{cases} a = -1, \\ t = 0. \end{cases}$

经验证知 $h_1(x) = e^x + x^2 - x + 1$ 在 $x = 0$ 处取得极小值，所以 $\begin{cases} a = -1, \\ t = 0. \end{cases}$

3° 当 $a = 0$ 时， $h_2'(x) = e^x \cdot (x+1)^2 \geq 0$ ， $h_2(x)$ 是增函数，无极小值，与题设不符。

综上所述: $\begin{cases} a=2-\frac{1}{e} \\ t=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-1 \\ t=0 \end{cases}$12 分

② 因为 $a < 0$, 由①之结论知, $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2 - x + 1$,
易见 $f(x) > 0$, $g(x) > 0$,

故不等式 $f(x) + g(x) < m \cdot f(x)g(x)$ 等价于: $\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)} < m$,

令 $H(x) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)}$, 则 $H(x)_{\max} < m$.

因为 $x \geq 1$, 所以 $H(x)$ 单调递减,

所以 $H(x)_{\max} = H(1) = \frac{1}{e} + 1$, 从而 $m > \frac{1}{e} + 1$16 分

高三数学练习卷附加题参考答案

21-A 解: 旋转变换矩阵 $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 3 分

记 $M = M_2 M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 6 分

设 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 是变换后曲线上任一点, 与之对应的变换前的点是 $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$,

则 $M \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, 也就是 $\begin{cases} x = x_0 - y_0, \\ y = x_0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x_0 = y, \\ y_0 = y - x, \end{cases}$

代入 $x_0^2 + y_0^2 = 1$, 得 $y^2 + (y - x)^2 = 1$,

所以所求曲线的方程是 $x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$10 分

21-B 解: 直线 $l: \sqrt{3}x + y = 4\sqrt{3}$, 3 分

设点 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\therefore d = \frac{|3 \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha - 4\sqrt{3}|}{2}$ 5 分

$= \frac{|2\sqrt{3} \sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) - 4\sqrt{3}|}{2} \leq \frac{|-2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}|}{2} = 3\sqrt{3}$, 8 分

当且仅当 $\alpha + \frac{\pi}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, 即 $\alpha = 2k\pi - \frac{2}{3}\pi$ 时取“=”,

P 到直线 l 距离的最大值为 $3\sqrt{3}$10 分

21-C 解: 由不等式 $m - g(x) \geq f(x) + x (m \in \mathbf{R})$ 可得

$$m \geq |x-2| + |x+1|, \therefore m \geq (|x-2| + |x+1|)_{\min}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\because |x-2| + |x+1| \geq |x-2 - (x+1)| = 3, \therefore m \geq 3, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

故实数 m 的最小值是 3.10 分

22. 解: 设 O 是 AD 中点, $\triangle PAD$ 为正三角形,

则 $PO \perp AD$, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$,

$PO \perp$ 面 $ABCD$, 又 $\because AD = AE = 2$,

$\angle DAB = 60^\circ$, 所以 $\triangle ADE$ 为正三角形,

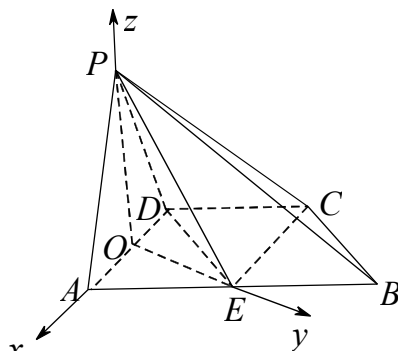
$OE \perp AD$, 建立如图所示空间直角坐标系

$O - xyz$, 则 $P(0, 0, \sqrt{3}), E(0, \sqrt{3}, 0)$,

$C(-2, \sqrt{3}, 0), D(-1, 0, 0)$,

于是 $\overrightarrow{PC} = (-2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}), \overrightarrow{PE} = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$,

$\overrightarrow{DP} = (1, 0, \sqrt{3})$, 1 分



(1) 设平面 PEC 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$,

由 $\overrightarrow{PC} \cdot \vec{n}_1 = 0, \overrightarrow{PE} \cdot \vec{n}_1 = 0$ 得一个法向量为 $\vec{n}_1 = (0, 1, 1)$,

平面 EDC 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$, 3 分

设二面角 $P-EC-D$ 的平面角为 θ , 则

$$|\cos \theta| = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

由图知 θ 为锐角, 所以, 二面角 $P-EC-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 5 分

(2) 设 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PC} (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则 $\overrightarrow{PM} = (-2\lambda, \sqrt{3}\lambda, -\sqrt{3}\lambda)$,

$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PM} = (1-2\lambda, \sqrt{3}\lambda, \sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$, $\overrightarrow{PE} = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$,

$$\text{所以 } |\cos \langle \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{PE} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{PE}|}{|\overrightarrow{DM}| |\overrightarrow{PE}|} = \frac{|6\lambda - 3|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10\lambda^2 - 10\lambda + 4}} = \frac{\sqrt{6}}{8}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

解得 $\lambda = \frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$, 所以存在点 M 为线段 PC 的三等分点.10 分

23. 解: (1) 当 $n = 2$ 时, $M = \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}$ 具有性质 P ,

对应的 k 分别为 0, 1, 2, 1, 1, 故 $f(2) = 5$ 3 分

(2) 设当 $n=t$ 时, 具有性质 P 的集合 M 的个数为 $f(t)$,

则当 $n=t+1$ 时, $f(t+1)=f(t)+g(t+1)$,

其中 $g(t+1)$ 表示 $t+1 \in M$ 时也具有性质 P 的集合 M 的个数,

下面计算 $g(t+1)$ 关于 t 的表达式,

此时应有 $2k \geq t+1$, 即 $k \geq \frac{t+1}{2}$, 故对 $n=t$ 分奇偶讨论,

① 当 t 为偶数时, $t+1$ 为奇数, 故应该有 $k \geq \frac{t+2}{2}$,

则对每一个 k , $t+1$ 和 $2k-t-1$ 必然属于集合 M , 且 t 和 $2k-t$, ...,

k 和 k 共有 $t+1-k$ 组数, 每一组数中的两个数必然同时属于或不属于集合 M ,

故对每一个 k , 对应的具有性质 P 的集合 M 的个数为

$$C_{t+1-k}^0 + C_{t+1-k}^1 + \cdots + C_{t+1-k}^{t+1-k} = 2^{t+1-k},$$

$$\text{所以 } g(t+1) = 2^{\frac{t}{2}} + 2^{\frac{t-2}{2}} + \cdots + 2^1 + 1 = 2 \times 2^{\frac{t}{2}} - 1,$$

② 当 t 为奇数时, $t+1$ 为偶数, 故应该有 $k \geq \frac{t+1}{2}$,

$$\text{同理 } g(t+1) = 2^{\frac{t+1}{2}} + 2^{\frac{t-1}{2}} + \cdots + 2^1 + 1 = 2\sqrt{2} \times 2^{\frac{t}{2}} - 1,$$

$$\text{综上, 可得 } f(t+1) = \begin{cases} f(t) + 2 \times 2^{\frac{t}{2}} - 1, & t \text{ 为偶数,} \\ f(t) + 2\sqrt{2} \times 2^{\frac{t}{2}} - 1, & t \text{ 为奇数,} \end{cases} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{又 } f(2) = 5, \text{ 由累加法解得 } f(t) = \begin{cases} 6 \times 2^{\frac{t}{2}} - t - 5, & t \text{ 为偶数,} \\ 4 \times 2^{\frac{t+1}{2}} - t - 5, & t \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

$$\text{即 } f(n) = \begin{cases} 6 \times 2^{\frac{n}{2}} - n - 5, & n \text{ 为偶数,} \\ 4 \times 2^{\frac{n+1}{2}} - n - 5, & n \text{ 为奇数.} \end{cases} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$