

## 数学试题

2018. 12. 14

## 注意事项:

1. 本试卷共 4 页, 包括填空题(第 1 题~第 14 题)、解答题(第 15 题~第 20 题)两部分. 本试卷满分为 160 分, 考试时间为 120 分钟.

2. 试题的答案写在答题卡上对应题目的答案空格内. 考试结束后, 交回答题纸.

## 参考公式:

样本数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的方差  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ , 其中  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

一、填空题(本大题共 14 小题, 每小题 5 分, 计 70 分. 不需写出解答过程, 请把答案写在答题纸的指定位置上)

1. 已知集合  $M = \{0, 1, 2, 3\}$ , 集合  $N = \{-1, 0, 1\}$ , 则  $M \cap N =$      ▲    .

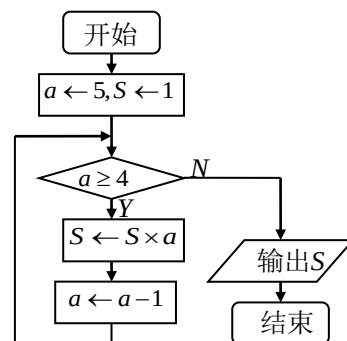
2. 双曲线  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$  的渐近线方程是     ▲    .

3. 复数  $z$  满足  $\frac{z}{1+i} = -3i$ , 其中  $i$  是虚数单位, 则复数  $z$  的模是     ▲    .

4. 若一组样本数据 3, 4, 8, 9,  $a$  的平均数为 6, 则该组数据的方差  $s^2 =$      ▲    .

5. 从 1, 2, 3, 4 这四个数中一次性随机地取出 2 个数, 则所取 2 个数的乘积为奇数的概率是     ▲    .

6. 如图所示的流程图的运行结果是     ▲    .



第 6 题图

7. 将函数  $y = \sin 2x$  的图象向左平移  $\varphi (\varphi > 0)$  个单位,

可得到函数  $y = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$  的图象, 则  $\varphi$  的最小值为     ▲    .

8. 设直线  $l$  是曲线  $y = 2x^2 + \ln x$  的切线, 则直线  $l$  的斜率的最小值是     ▲    .

9. 已知  $\tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{7}$ ,  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 则  $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6})$  的值是     ▲    .

10. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 且当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x^2 - x$ .

若  $f(a) < 4 + f(-a)$ , 则实数  $a$  的取值范围是     ▲    .

11. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ ,  $BC = 2$ ,  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$ .

若  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}$ , 则  $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB}$  的值为     ▲    .

12. 已知圆  $C: x^2 + (y-2)^2 = 2$ , 直线  $l: kx - y - 2 = 0$  与  $y$  轴交于点  $A$ , 过  $l$  上一点  $P$  作圆  $C$  的切线, 切点为  $T$ , 若  $PA = \sqrt{2}PT$ , 则实数  $k$  的取值范围是     ▲    .

13. 已知  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $a_n = 2^n$ ,  $b_n = 2n - 1$ ,  $c_n = \max\{b_1 - a_1n, b_2 - a_2n, \dots, b_n - a_nn\}$ , 其中

$\max\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$  表示  $x_1, x_2, \dots, x_s$  这  $s$  个数中最大的数. 数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ ,

若  $a_n + \lambda T_n \geq 0$  对任意的  $n \in \mathbf{N}^*$  恒成立, 则实数  $\lambda$  的最大值是     ▲    .

14. 设函数  $f(x) = e^x(\sin x - \cos x)$ ,  $0 \leq x \leq 2019\pi$ ,

则函数  $f(x)$  的各极大值之和为     ▲    .

二、解答题 (本大题共 6 小题, 计 90 分. 解答应写出必要的文字说明, 证明过程或演算步骤, 请把答案写在答题卡的指定区域内)

15. (本小题满分 14 分)

在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $\sqrt{3}b \sin A = a \cos B$ .

(1) 求角  $B$ ;

(2) 若  $b = 3$ ,  $\sin C = \sqrt{3} \sin A$ , 求  $a, c$ .

16. (本小题满分 14 分)

已知函数  $f(x) = 2\sqrt{3}a \sin x \cos x + a \sin^2 x - a \cos^2 x + b$ , ( $a, b \in \mathbf{R}$ ).

(1) 若  $a > 0$ , 求函数  $f(x)$  的单调增区间;

(2) 若  $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  时, 函数  $f(x)$  的最大值为 3, 最小值为  $1 - \sqrt{3}$ , 求  $a, b$  的值.

17. (本小题满分 14 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上一点与两焦点构成的三角形的周长为  $4+2\sqrt{3}$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

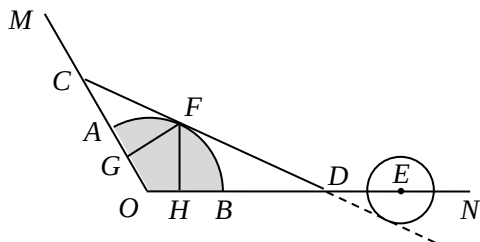
(2) 设椭圆  $C$  的右顶点和上顶点分别为  $A$ 、 $B$ , 斜率为  $\frac{1}{2}$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $P$ 、 $Q$  两点 (点  $P$  在第一象限). 若四边形  $APBQ$  面积为  $\sqrt{7}$ , 求直线  $l$  的方程.

18. (本小题满分 16 分)

如图, 某公园内有一个以  $O$  为圆心, 半径为 5 百米, 圆心角为  $\frac{2\pi}{3}$  的扇形人工湖  $OAB$ ,  $OM$ 、 $ON$  是分别由  $OA$ 、 $OB$  延伸而成的两条观光道. 为便于游客观光, 公园的主管部门准备在公园内增建三条观光道, 其中一条与  $\widehat{AB}$  相切点  $F$ , 且与  $OM$ 、 $ON$  分别相交于  $C$ 、 $D$ , 另两条是分别和湖岸  $OA$ 、 $OB$  垂直的  $FG$ 、 $FH$  (垂足均不与  $O$  重合).

(1) 求新增观光道  $FG$ 、 $FH$  长度之和的最大值;

(2) 在观光道  $ON$  段上距离  $O$  为 15 百米的  $E$  处的道路两侧各有一个大型游乐场, 为了不影响游乐场平时的正常开放, 要求新增观光道  $CD$  的延长线不能进入以  $E$  为圆心, 2.5 百米为半径的圆形  $E$  的区域内. 则点  $D$  应选择在  $O$  与  $E$  之间的什么位置? 请说明理由.



19. (本小题满分 16 分)

已知数列  $\{a_n\}$  各项均不相同,  $a_1=1$ , 定义  $b_n(k) = a_n + (-1)^k a_{n+k}$ , 其中  $n, k \in \mathbf{N}^*$ .

(1) 若  $b_n(1) = n$ , 求  $a_5$ ;

(2) 若  $b_{n+1}(k) = 2b_n(k)$  对  $k = 1, 2$  均成立, 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ .

(i) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(ii) 若  $k, t \in \mathbf{N}^*$ , 且  $S_1, S_k - S_1, S_t - S_k$  成等比数列, 求  $k$  和  $t$  的值.

20. (本小题满分 16 分)

已知函数  $f(x) = \frac{x}{e^x}, g(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

(1) 求  $f(x)$  的极大值;

(2) 当  $a > 0$  时, 不等式  $xg(x) \leq ax + b$  恒成立, 求  $\frac{b}{a}$  的最小值;

(3) 是否存在实数  $k \in \mathbf{N}$ , 使得方程  $f(x) = (x+1)g(x)$  在  $(k, k+1)$  上有唯一的根,

若存在, 求出所有  $k$  的值, 若不存在, 说明理由.

## 说明:

1. 本解答给出的解法供参考. 如果考生的解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.
2. 对计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后续部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定给分, 但不得超过该部分正确解答应得分数的一半; 如果后续部分的解答有较严重的错误, 就不再给分.
3. 解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数.
4. 只给整数分数, 填空题不给中间分数.

## 一、填空题(本大题共 14 小题, 每小题 5 分, 计 70 分.)

1.  $\{0,1\}$
2.  $y = \pm \frac{5}{3}x$
3.  $3\sqrt{2}$
4.  $\frac{26}{5}$
5.  $\frac{1}{6}$
6. 20
7.  $\frac{\pi}{8}$
8. 4
9.  $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$
10.  $(-\infty, 2)$
11.  $-\frac{4}{3}$
12.  $k \leq -\frac{\sqrt{7}}{3}$  或  $k \geq \frac{\sqrt{7}}{3}$
13.  $\frac{8}{9}$
14.  $\frac{e^{\pi}(1-e^{2020\pi})}{1-e^{2\pi}}$

## 二、解答题(本大题共 6 小题, 计 90 分. 解答应写出必要的文字说明, 证明过程或演算步骤, 请把答案写在答题卡的指定区域内)

15. 解: (1) 在  $\triangle ABC$  中,

由正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ , 得  $\sqrt{3} \sin B \sin A = \sin A \cos B$ . .....2分

又因为在  $\triangle ABC$  中  $\sin A \neq 0$ . 所以  $\sqrt{3} \sin B = \cos B$ . .....4分

法一: 因为  $0 < B < \pi$ , 所以  $\sin B \neq 0$ , 因而  $\cos B \neq 0$ .

所以  $\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 所以  $B = \frac{\pi}{6}$ . .....6分

法二:  $\sqrt{3} \sin B - \cos B = 0$  即  $2 \sin(B - \frac{\pi}{6}) = 0$ , .....4分

所以  $B - \frac{\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ , 因为  $0 < B < \pi$ , 所以  $B = \frac{\pi}{6}$ . .....6分

(2) 由正弦定理得  $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ ,

而  $\sin C = \sqrt{3} \sin A$ , 所以  $c = \sqrt{3}a$ , ① .....9分

由余弦定理  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ , 得  $9 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \frac{\pi}{6}$ ,

即  $a^2 + c^2 - \sqrt{3}ac = 9$ , ② .....12分

把①代入②得  $a = 3$ ,  $c = 3\sqrt{3}$ . .....14分

16. 解: (1) 因为  $f(x) = 2\sqrt{3}a \sin x \cos x + a \sin^2 x - a \cos^2 x + b$   
 $= \sqrt{3}a \sin 2x - a \cos 2x + b$  .....2 分  
 $= 2a \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + b$ . ..... 4 分

且  $a > 0$ , 所以函数  $f(x)$  的单调增区间为  $[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi], k \in \mathbf{Z}$ . .....6 分

(2) 当  $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  时,  $2x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ ,  $2\sin(2x - \frac{\pi}{6}) \in [-2, \sqrt{3}]$ , .....8 分

则当  $a > 0$  时, 函数  $f(x)$  的最大值为  $\sqrt{3}a + b$ , 最小值为  $-2a + b$ .

所以  $\begin{cases} \sqrt{3}a + b = 3, \\ -2a + b = 1 - \sqrt{3}, \end{cases}$  解得  $a = 1, b = 3 - \sqrt{3}$ . .....10 分

当  $a < 0$  时, 函数  $f(x)$  的最大值为  $-2a + b$ , 最小值为  $\sqrt{3}a + b$ .

所以  $\begin{cases} \sqrt{3}a + b = 1 - \sqrt{3}, \\ -2a + b = 3, \end{cases}$  解得  $a = -1, b = 1$ . .....12 分

综上,  $a = 1, b = 3 - \sqrt{3}$  或  $a = -1, b = 1$ . .....14 分

17. 解: (1) 由题设得  $4 + 2\sqrt{3}$ , 又  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 解得  $a = 2, c = \sqrt{3}, \therefore b = 1$ . ...2 分

故椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . .....4 分

(2) 设直线  $l$  方程为:  $y = \frac{1}{2}x + m$  代入椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  并整理得:

$$x^2 + 2mx + 2m^2 - 2 = 0,$$

设  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ , 则  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = 2m^2 - 2 \end{cases}$ . .....6 分

$$\begin{aligned} \therefore |PQ| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{1 + k^2} |x_2 - x_1| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{8 - 4m^2}, \end{aligned} \quad \text{.....8 分}$$

$B$  到直线  $PQ$  的距离为  $d_1 = \frac{2|m-1|}{\sqrt{5}}$ ,

$A$  到直线  $PQ$  的距离为  $d_1 = \frac{2|m+1|}{\sqrt{5}}$ , .....10 分

又因为  $P$  在第一象限, 所以  $-1 < m < 1$ ,



所以  $\frac{10\sqrt{3}}{3} < x_D < 10$ .

.....15 分

答: (1) 新增观光道  $FG$ 、 $FH$  长度之和的最大值是  $5\sqrt{3}$  百米;

(2) 点  $D$  应选择在  $O$  与  $E$  之间, 且到点  $O$  的距离在区间  $(\frac{10\sqrt{3}}{3}, 10)$  (单位: 百米) 内的任何一点处.

.....16 分

19. 解: (1) 因为  $b_n(1) = a_n - a_{n+1} = n$ ,

所以  $a_1 - a_5 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ,

所以  $a_5 = -9$ .

.....4 分

(2) (i) 因为  $b_{n+1}(k) = 2b_n(k)$ ,

得  $a_{n+1} + (-1)^k a_{n+1+k} = 2(a_n + (-1)^k a_{n+k})$ ,

令  $k=1$ ,  $a_{n+1} - a_{n+2} = 2(a_n - a_{n+1})$ , .....①

$k=2$ ,  $a_{n+1} + a_{n+3} = 2(a_n + a_{n+2})$ , .....② .....6 分

由①得  $a_{n+2} - a_{n+3} = 2(a_{n+1} - a_{n+2})$ , .....③

②+③得  $a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n)$ , .....④ .....8 分

①+④得  $a_{n+1} = 2a_n$ ,

又  $a_1 = 1 \neq 0$ , 所以数列  $\{a_n\}$  是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列,

所以  $a_n = 2^{n-1}$ . .....10 分

(ii) 由 (i) 可知  $S_n = 2^n - 1$ .

因为  $S_1, S_k - S_1, S_t - S_k$  成等比数列,

所以  $(S_k - S_1)^2 = S_1(S_t - S_k)$ , 即  $(2^k - 2)^2 = 2^t - 2^k$ , .....12 分

所以  $2^t = (2^k)^2 - 3 \cdot 2^k + 4$ , 即  $2^{t-2} = (2^{k-1})^2 - 3 \cdot 2^{k-2} + 1(*)$ .

由于  $S_k - S_1 \neq 0$ , 所以  $k \neq 1$ , 即  $k \geq 2$ .

当  $k=2$  时,  $2^t = 8$ , 得  $t=3$ . .....14 分

当  $k \geq 3$  时, 由(\*), 得  $(2^{k-1})^2 - 3 \cdot 2^{k-2} + 1$  为奇数,

所以  $t-2=0$ , 即  $t=2$ , 代入(\*)得  $2^{2k-2} - 3 \cdot 2^{k-2} = 0$ , 即  $2^k = 3$ , 此时  $k$  无正整数解.

综上,  $k=2, t=3$ . .....16 分

20. 解: (1)  $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$ , 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x=1$ . .....2 分

当  $x < 1$  时,  $f'(x) > 0$ , 则  $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递增, 当  $x > 1$  时,  $f'(x) < 0$ , 则  $f(x)$

在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 故当  $x=1$  时,  $f(x)$  的极大值为  $\frac{1}{e}$ . .....4 分

(2) 不等式  $xg(x) \leq ax + b$  恒成立, 即  $\ln x - ax - b \leq 0$  恒成立,



记  $m(x) = \ln x - ax - b (x > 0)$ , 则  $m'(x) = \frac{1-ax}{x} (x > 0)$ ,

当  $a > 0$  时, 令  $m'(x) = 0$ , 得  $x = \frac{1}{a}$ , .....6 分

当  $x \in (0, \frac{1}{a})$  时,  $m'(x) > 0$ , 此时  $m(x)$  单调递增, 当  $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$  时,  $m'(x) < 0$ , 此

时  $m(x)$  单调递减, 则  $m(x)_{\max} = m(\frac{1}{a}) = -\ln a - 1 - b \leq 0$ , 即  $b \geq -\ln a - 1$ , ...8 分

则  $\frac{b}{a} \geq -\frac{\ln a + 1}{a}$ , 记  $n(a) = -\frac{\ln a + 1}{a}$ , 则  $n'(a) = \frac{\ln a}{a^2} (a > 0)$ , 令  $n'(a) = 0$ , 得  $a = 1$

当  $a \in (0, 1)$  时,  $n'(a) < 0$ , 此时  $n(a)$  单调递减, 当  $a \in (1, +\infty)$  时,  $n'(a) > 0$ , 此时  $n(a)$  单调递增,  $n(a)_{\min} = n(1) = -1$ , 故  $\frac{b}{a}$  的最小值为  $-1$ . .....10 分

(3) 记  $s(x) = \frac{x}{e^x} - \frac{(x+1)\ln x}{x}$ , 由  $s(1) = \frac{1}{e} > 0$ ,  $s(2) = \frac{2}{e^2} - \frac{3\ln 2}{2} < 1 - 1 = 0$ , .....12 分

故存在  $k = 1$ , 使  $f(x) = (x+1)g(x)$  在  $(1, 2)$  上有零点, 下面证明唯一性:

① 当  $0 < x \leq 1$  时,  $f(x) > 0, (x+1)g(x) < 0$ , 故  $s(x) > 0$ ,  $s(x) = 0$  在  $(0, 1]$  上无解  
.....14 分

② 当  $x > 1$  时,  $s'(x) = \frac{1-x}{e^x} - \frac{x+1-\ln x}{x^2}$ , 而  $\frac{1-x}{e^x} < 0, x+1-\ln x > 0, \frac{1}{x^2} > 0$ ,

此时  $s'(x) < 0$ ,  $s(x)$  单调递减,

所以当  $k = 1$  符合题意. ....16 分