

江苏省仪征中学 2020—2021 学年度第二学期期初考试

高二数学试题

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知命题 $p: \exists x \in R, e^x - x - 1 \leq 0$, 则命题 p 的否定为 ()

- A. $\forall x \in R, e^x - x - 1 > 0$ B. $\forall x \notin R, e^x - x - 1 > 0$
C. $\forall x \in R, e^x - x - 1 \geq 0$ D. $\exists x \in R, e^x - x - 1 > 0$

2. 已知 $\frac{m}{1+i} = 1 - ni$, 其中 m, n 是实数, i 是虚数单位, 则 $n =$ ()

- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

3. 已知 $f(x) = x \ln x$, 若 $f'(x_0) = 2$, 则 x_0 等于 ()

- A. e^2 B. e C. $\frac{\ln 2}{2}$ D. $\ln 2$

4. 《周髀算经》中一个问题：从冬至之日起，小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种这十二个节气的日影子长依次成等差数列，若冬至、立春、春分的日影子长的和是 37.5 尺，芒种的日影子长为 4.5 尺，则冬至的日影子长为： ()

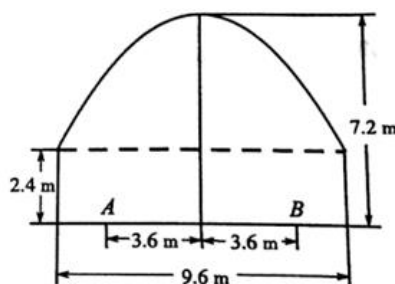
- A. 9.5 尺 B. 10.5 尺 C. 12.5 尺 D. 15.5 尺

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 F_1 , 右焦点为 $F_2(2, 0)$, 点 P 为双曲线右支上的一点,

且 $|F_1F_2| = 2|PF_2|$, $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 10, 则双曲线的渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm\sqrt{3}x$ B. $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ C. $y = \pm 2x$ D. $y = \pm\frac{1}{2}x$

6. 有一个隧道内设双行线公路，其截面由一长方形和抛物线构成，如图所示. 为了保证安全，要求行驶车辆顶部（设为平顶）与隧道顶部在竖直方向上的高度之差至少为 0.7m，若行车道总宽度为 7.2m，则车辆通过隧道时的限制高度为 ()



- A. 3.3m B. 3.5m C. 3.8m D. 4.5m

7. 正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{9}{b} = 1$, 若不等式 $a + b \geq -x^2 + 4x + 18 - m$ 对任意实数 x 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $[3, +\infty)$ B. $[6, +\infty)$ C. $(-\infty, 3]$ D. $(-\infty, 6]$

8. 若椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的点 $(2, \frac{5}{3})$ 到右准线的距离为 $\frac{5}{2}$, 过点 $M(0, 1)$ 的直线 l 与 C 交于

两点 A, B , 且 $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$, 则 l 的斜率为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\pm \frac{1}{3}$ C. $\pm \frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{9}$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。

9. 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 则下列结论正确的有 ()

- A. 若 $a < b, c < 0$, 则 $ac > bc$ B. $a + \frac{1}{a} \geq 2$
C. 若 $a < b < 0$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ D. $(\frac{a+b}{2})^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

10. 设复数 z 满足 $(1+i)z = 2i$ (其中 i 为虚数单位), 则下列结论正确的是 ()

- A. $|z| = 2$ B. z 的共轭复数在复平面内对应的点在第四象限
C. z 的虚部为 i D. 若复数 z_1 满足 $|z_1 - z| = 2$, 则 $|z_1|$ 的最小值为 $2 - \sqrt{2}$

11. 若 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $S_n = 2a_n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $a_5 = -16$ B. $S_5 = -63$
C. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列 D. 数列 $\{S_n + 1\}$ 是等比数列

12. 我们把离心率为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的椭圆称为黄金椭圆, 类似地, 也把离心率为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 的双曲线称为黄金双曲线, 则 ()

- A. 曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{\sqrt{5}+1} = 1$ 是黄金双曲线
B. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 是黄金双曲线, 则 $b^2 = ac$ (c 为半焦距)
C. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 是黄金双曲线, 则右焦点 F_2 到一条渐近线的距离等于焦距的四分之一
D. 过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点 F_2 且垂直于实轴的直线 l 交 C 于 M, N 两点, O 为坐标原点, 若 $\angle MON = 90^\circ$, 则双曲线 C 是黄金双曲线

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=1$ ， $a_{n+1}-a_n=n$ ($n \in N^*$)，则 $a_{10} = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 。

14. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AC=3, BC=3, AB=3\sqrt{2}, AA_1=2$ ，则异面直线 A_1C 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 。

15. 过坐标原点作曲线 $y=e^x$ 的切线，则切线方程为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 。

16. 已知双曲线 $\Gamma: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的上、下焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_1 且垂直于 y 轴的直线与 Γ 交于 A, B 两点，直线 AF_2, BF_2 分别交 x 轴于点 C, D ，若 $|CF_2| + |DF_2| = 12$ ，则过点 $M(a, b^2), N(-2, 0)$ 的直线的斜率的最大值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ ，此时双曲线的离心率为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 。

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分) 已知命题 p ：实数 t 满足 $t^2 - 7at + 12a^2 < 0 (a < 0)$ ，命题 q ：实数 t 满足的曲线

$$\frac{x^2}{25+t} + \frac{y^2}{9+t} = 1 \text{ 为椭圆。}$$

(1) 若 q 为真，求实数 t 的取值范围；

(2) 若 p 是 q 的充分条件，求实数 a 的取值范围。

18. (12分) 已知复数 $z = a + bi (a, b \in R, a > 0)$ ，且满足 $|z| = 2\sqrt{10}$ ，复数 $(1-2i)z$ 在复平面上对应的点在第一、三象限的角平分线上。

(1) 求复数 z ；

(2) 若 $\bar{z} - \frac{m-i}{1+i}$ 为纯虚数，求实数 m 的值。

19. (12分) 在①数列 $\{a_n\}$ 为递增的等比数列，且 $a_2 + a_3 = 12$ ，②数列 $\{a_n\}$ 满足 $S_{n+1} - 2S_n = 2$ ，③数列 $\{a_n\}$ 满足 $2^n a_1 + 2^{n-1} a_2 + \cdots + 2a_n = na_{n+1}$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，再完成解答。

问题：设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 2$ ， $\underline{\quad \quad \quad}$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \frac{1}{\log_2 a_n \cdot \log_2 a_{n+2}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

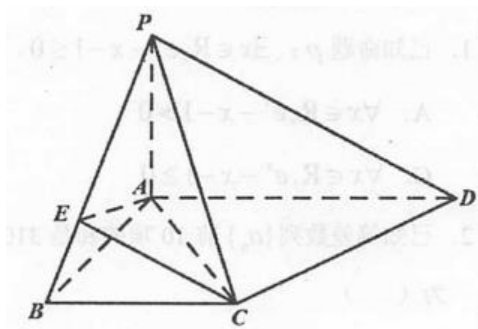
20. (12 分) 如图, 已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为直角梯形,

$$AD = 2AB = 2BC = 2, PA = 1, \angle ABC = 90^\circ.$$

(1) 求直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值;

(2) 在线段 PB 上是否存在点 E , 使得二面角 $E-AC-P$ 的余弦值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$? 若存在, 指出点 E 的位置;

若不存在, 说明理由.

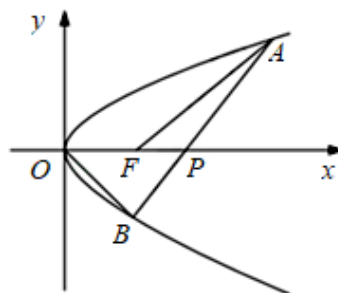


21. (12 分) 如图, 抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过点 $P(2, 0)$ 作直线 l 与抛物线交于 A, B 两点,

当直线 l 与 x 轴垂直时 AB 的长为 $4\sqrt{2}$.

(1) 求抛物线的方程;

(2) 若 $\triangle APF$ 与 $\triangle BPO$ 的面积相等, 求直线 l 的方程.



22. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 且过点 $(1, \frac{3}{2})$,

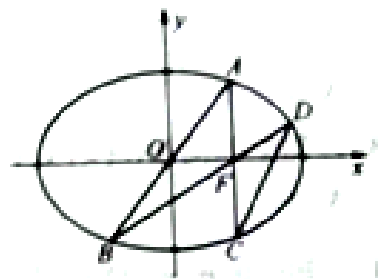
F 是椭圆的右焦点, A, B 为椭圆上关于原点对称的两点, 连接 AF, BF 并延长分别交椭圆与点 C, D .

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 若 $AF = FC$, 求 $\frac{BF}{FD}$ 的值;

(3) 设直线 AB, CD 的斜率分别为 k_1, k_2 , 是否存在实数 m ,

使得 $k_2 = mk_1$? 若存在, 求出 m 的值; 若不存在, 请说明理由.



期初考试 高二数学（答案）

一、单项选择题：AABD ACBB

二、多项选择题：ACD BD AC BD

三、填空题：

13. 46 14. $\frac{4}{13}$ 15. $y = ex$ 16. 4, $\sqrt{5}$.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：（1）因为 q 为真，所以
$$\begin{cases} 25+t > 0 \\ 9+t > 0 \\ 25+t \neq 9+t \end{cases}, \text{解得 } t > -9;$$

（2）命题 P ：由 $t^2 - 7at + 12a^2 < 0$ 得 $(t-3a)(t-4a) < 0$,

因为 $a < 0$ ，所以 $4a < t < 3a$,

设 $A = \{t \mid 4a < t < 3a\}$, $B = \{t \mid t > -9\}$,

因为 P 是 q 的充分条件，所以集合 A 是集合 B 的子集，

故有 $4a \geq -9$ ，解得 $-\frac{9}{4} \leq a < 0$.

18 解（1）设 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R}, a > 0)$ ，由 $|z| = 2\sqrt{10}$ 得： $a^2 + b^2 = 40$ ①，

又 $(1-2i)z = (a+2b) + (-2a+b)i$ 在复平面上对应的点在第一、三象限的角平分线上，

则 $a+2b = -2a+b$ 即 $-3a = b$ ②，

由①②联立的方程组得 $a = 2, b = -6$ 或 $a = -2, b = 6$,

$\because a > 0, \therefore a = 2, b = -6$,

则 $z = 2 - 6i$;

（2） $\bar{z} - \frac{m-i}{1+i} = 2 + 6i - \frac{(m-i)(1-i)}{2} = \frac{5-m}{2} + \frac{13+m}{2}i$,

$\because \bar{z} - \frac{m-i}{1+i}$ 为纯虚数， $\therefore \begin{cases} \frac{-m+5}{2} = 0 \\ \frac{13+m}{2} \neq 0 \end{cases}; \quad \text{解得 } m = 5.$

19 解：（1）选①数列 $\{a_n\}$ 为递增的等比数列，且 $a_2 + a_3 = 12$,

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，($q > 0$)，则 $a_1 q (1+q) = 2q (1+q) = 12$ ，解得 $q = 2$ （-3舍去），

所以 $a_n = 2^n$;

选②数列 $\{a_n\}$ 满足 $S_{n+1} - 2S_n = 2$,

可得 $S_{n+1} + 2 = 2(S_n + 2)$, 数列 $\{S_n + 2\}$ 是首项为 $S_1 + 2 = 4$, 公比为 2 的等比数列,

则 $S_n + 2 = 2^{n+1}$, 即为 $S_n = 2^{n+1} - 2$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n+1} - 2 - 2^n + 2 = 2^n$,

$a_1 = 2$ 也满足上式, 所以 $a_n = 2^n, n \in \mathbf{N}^*$;

选③ $2^n a_1 + 2^{n-1} a_2 + \dots + 2a_n = na_{n+1}$ (1),

当 $n \geq 2$ 时, $2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} a_2 + \dots + 2a_{n-1} = (n-1)a_n$ (2),

由 (2) $\times 2 -$ (1) 可得 $2a_n = na_{n+1} - 2(n-1)a_n$, 即 $a_{n+1} = 2a_n$,

又因为 $a_1 = 2, a_2 = 2a_1 = 4$, 也满足上式,

故数列 $\{a_n\}$ 为首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 所以 $a_n = 2^n, n \in \mathbf{N}^*$;

(2) 由 (I) 可得 $a_n = 2^n, b_n = \frac{1}{\log_2 a_n \cdot \log_2 a_{n+2}} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } T_n &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

20. 解: (1) 以 $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}\}$ 为正交基底, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0,0,0), B(1,0,0), D(0,2,0), C(1,1,0), P(0,0,1)$

$$\overrightarrow{CP} = (-1, -1, 1), \overrightarrow{CD} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{PB} = (1, 0, -1)$$

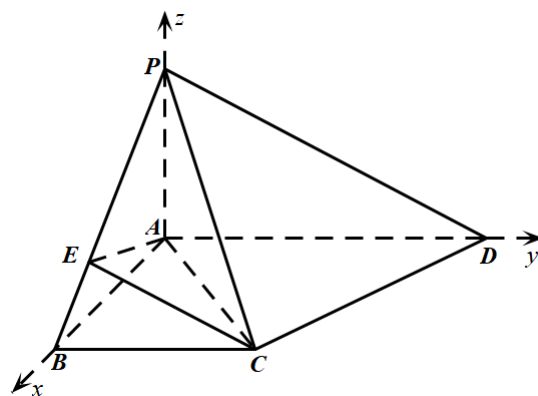
不妨设平面 PCD 的法向量 $\overrightarrow{m} = (x, y, z)$

$$\text{则有 } \begin{cases} \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{CP} = 0 \\ \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}, \text{ 取 } \overrightarrow{m} = (1, 1, 2)$$

设直线 PB 与平面 PCD 所成的角为 α , 则

$$\sin \alpha = |\cos \langle \overrightarrow{m}, \overrightarrow{PB} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{m}| \cdot |\overrightarrow{PB}|} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

所以直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$



.....6 分

(2) 假设线段 PB 上存在点 E , 使得二面角 $E-AC-P$ 的余弦值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

设 $\overrightarrow{PE} = \lambda \overrightarrow{PB}, \lambda \in [0, 1]$, 则 $E(\lambda, 0, 1-\lambda)$

从而 $\overrightarrow{AE} = (\lambda, 0, 1-\lambda), \overrightarrow{AC} = (1, 1, 0), \overrightarrow{AP} = (0, 0, 1)$

设平面 ACE 的法向量 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$$\text{则有 } \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{AE} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \lambda x_1 + (1-\lambda)z_1 = 0 \\ x_1 + y_1 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } \vec{n}_1 = (\lambda-1, 1-\lambda, \lambda)$$

设平面 PAC 的法向量 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$$\text{则有 } \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{AP} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} z_2 = 0 \\ x_2 + y_2 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } \vec{n}_2 = (1, -1, 0)$$

$$|\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{2|\lambda-1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2(\lambda-1)^2 + \lambda^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{解之得 } \lambda = \frac{2}{3} \text{ 或 } \lambda = 2 \text{ (舍)}$$

故存在点 E 满足条件, E 为 PB 上靠近点 B 的三等分点.12 分

21. 解: (1) 当直线 l 与 x 轴垂直时 AB 的长为 $4\sqrt{2}$, 又 $P(2,0)$, 取 $A(2, 2\sqrt{2})$,

所以 $(2\sqrt{2})^2 = 2p \cdot 2$, 解得 $p = 2$, 所以抛物线的方程为 $y^2 = 4x$.

$$(2) \text{ 由题意知 } S_{\triangle APF} = \frac{1}{2} \cdot FP \cdot |y_A| = \frac{1}{2} |y_A|, \quad S_{\triangle BPO} = \frac{1}{2} \cdot OP \cdot |y_B| = |y_B|,$$

$$\text{因 } S_{\triangle APF} = S_{\triangle BPO}, \text{ 所以 } |y_A| = 2|y_B|,$$

当 $k_{AB} = 0$ 时, 直线 AB 与抛物线不存在两个交点, 所以 $k_{AB} \neq 0$,

故设直线 AB 的方程为 $x = my + 2$, 代入抛物线方程得 $y^2 - 4my - 8 = 0$,

$$\text{所以 } y_A + y_B = 4m, \quad y_A y_B = -8,$$

$$\text{当 } y_A > 0, \quad y_B < 0 \text{ 时, } y_A = -2y_B, \quad -2y_B^2 = -8, \text{ 所以 } y_B = -2, \quad x_B = \frac{y_B^2}{4} = 1,$$

$$\text{所以 } k_{PB} = 2, \text{ 直线 } AB \text{ 的方程为 } 2x - y - 4 = 0,$$

$$\text{当 } y_A < 0, \quad y_B > 0 \text{ 时, 同理可得直线 } AB \text{ 的方程为 } 2x + y - 4 = 0,$$

综上所述, 直线 AB 的方程为 $2x \pm y - 4 = 0$.

22. 解: (1) 由题意知 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 则 $a = 2c, b^2 = a^2 - c^2 = 3c^2$,

将 $(1, \frac{3}{2})$ 代入题意方程: $\frac{1}{4c^2} + \frac{9}{3c^2 \times 4} = 1, \therefore c = 1$,

则 $a = 2, b = \sqrt{3}$, 所以椭圆方程为: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) 若 $AF = FC$, 由椭圆对称性, 知 $A(1, \frac{3}{2})$, 则 $B(-1, -\frac{3}{2}), F(1, 0)$,

此时直线 BF 方程为 $3x - 4y - 3 = 0$,

由 $\begin{cases} 3x - 4y - 3 = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 整理得 $7x^2 - 6x - 13 = 0$, 解得 $x = \frac{13}{7}$ ($x = -1$ 舍去),

故 $\frac{BF}{FD} = \frac{1 - (-1)}{\frac{13}{7} - 1} = \frac{7}{3}$;

(3) 设 $A(x_0, y_0)$, 则 $B(-x_0, -y_0)$,

直线 AF 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x - 1)$, 代入椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$,

得 $(15 - 6x_0)x^2 - (24 - 6x_0^2)x - 15x_0^2 + 24x_0 = 0$,

因为 $x = x_0$ 是方程的一个解, 所以点 C 的横坐标 $x_C = \frac{8 - 5x_0}{5 - 2x_0}$,

于是 C 的坐标为 $(\frac{8 - 5x_0}{5 - 2x_0}, \frac{-3y_0}{5 - 2x_0})$, 同理, D 的坐标为 $(\frac{8 + 5x_0}{5 + 2x_0}, \frac{3y_0}{5 + 2x_0})$,

所以 $k_2 = \frac{\frac{3y_0}{5 + 2x_0} - \frac{-3y_0}{5 - 2x_0}}{\frac{8 + 5x_0}{5 + 2x_0} - \frac{8 - 5x_0}{5 - 2x_0}} = -\frac{5y_0}{3x_0} = \frac{5}{3}k_1$, 即存在 $m = \frac{5}{3}$, 使得 $k_2 = \frac{5}{3}k_1$.