不等式

知识点：

1. 基本不等式的内容？

2. 常见的不等式类型？

3. 解决不等式问题有哪些方法？

小题热身：

1. 若不等式$(a+1)x^2+2(a+1)x-1<0$对一切$x\in\mathbf{R}$恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-2)\cup[-1,+\infty)$　　C. $(-2,-1)$　　D. $(-2,-1]$

2.（1）关于x的不等式$(ax-\dfrac{1}{a})(x+4)\geq 0$的解集为$\left[-4,4\right]$，则$a$的值为________.

（2）关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\left(-1,2\right)$，则关于 x 的不等式 $\dfrac{a-c}{x}\geq b$ 的解集为________.

3 若对于任意的$a\in\left[-1,1\right]$,函数$f(x)=x^2+(a-4)x+4-2a$的值恒大于 0,则x的取值范围是________.

4. 已知函数$f(x)=x+\dfrac{4}{x}$，$g(x)=2^x+a$，若$\forall x_1\in[\dfrac{1}{2},1]$，$\exists x_2\in[2,3]$，使$f(x_1)\geqslant g(x_2)$，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$a\leqslant 1$　　B．$a\geqslant 1$　　C．$a\leqslant 2$　　D．$a\geqslant 2$

5. 已知正实数x,y且$2a+b=ab-1$，则$a+2b$的最小值为______.

6.（多选题）十六世纪中叶，英国数学家雷科德在《砺智石》一书中首先把“＝”作为等号使用，后来英国数学家哈利奥特首次使用“＜”和“＞”符号，并逐渐被数学界接受，不等号的引入对不等式的发展影响深远. 若$a,b,c\in\mathrm{R}$，则下列命题正确的是（　　）

A．若$ab\neq 0$且$a<b$，则$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　B．若$0<a<1$，则$a^3<a$

C．若$a>b>0$，则$\dfrac{b+1}{a+1}>\dfrac{b}{a}$　　D．若$c<b<a$且$ac<0$，则$cb^2<ab^2$

例题讲解：

例 1．已知 $f(x)=ax^2-(a+1)^2x+2(a^2+1)$，$a\in\mathrm{R}$

（1）若 $a=1$时, 当 $x>1$时，求 $y=\dfrac{f(x)+8}{x-1}$ 的最小值.

（2）求关于 x 的不等式 $f(x)\geq 0$的解集.

例 2.某人为增加家庭收入，年初用 49 万元购买了一辆货车用于长途运输，第一年各种费用支出为 6 万元，以后每年都增加 2 万元，而每年的运输收益为 25 万元；

(1)求车主前 n 年的利润$f(n)$关于年数 n 的函数关系式，并判断他第几年开始获利超过 15 万元；

(注：利润=总收入−总成本)

(2)若干年后，车主准备处理这辆货车，有两种方案：

方案一：利润$f(n)$最多时，以 4 万元出售这辆车；方案二：年平均利润最大时，以 13 万元出售这辆车；

请你利用所学知识帮他做出决策.

归纳小结：

巩固练习：

1. （多选题）若a,b为非零实数，则下列不等式中**错误**的是（　　）

A. 如果$a>b>0$，$c>d$，则$ac>bd$　　B. 如果$a>b$，$c>d$，则$a+c>b+d$

C. 如果$ac^3>bc^3$，则$a>b$　　D. 如果$a<b$，，则$a^2b>ab^2$

2. 已知函数$f(x)=x^2+mx-1$，若对任意的$x\in[m,m+1]$都有$f(x)<0$，则实数m的取值范围是__________.

3. 已知正数a、b满足$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，则$\frac{9}{a-1}+\frac{4}{b-1}$的最小值是（　　）

A．6　　B．12　　C．24　　D．36

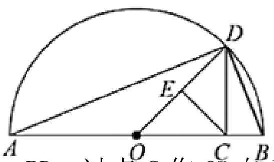
4. 已知x,y均为正数，且$\frac{3}{x+2}+\frac{3}{y+2}=1$，则$2x+y$的最小值为________.

5. 函数$y=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$的最小值为________.

6. 等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_2+a_4=48$，$a_5=28$，$S_n+30>n\lambda$对一切$n\in N^*$恒成立，则λ的取值范围为____________.

7. 已知正实数x,y满足$x^2+xy-2y^2=1$，则$5x-2y$的最小值为_______.

8（多选题）《几何原本》中的几何代数法是以几何方法研究代数问题，这种方法是后西方数学家处理问题的重要依据，通过这一原理，很多的代数公理或定理都能够通过图形实现证明，也称之为无字证明．现有图形如图所示，C 为线段 AB 上的点，且 AC＝a，BC＝b，O 为 AB 的中点，以 AB 为直径作半圆．过点 C 作 AB 的垂线交半圆于 D，连结 OD，AD，BD，过点 C 作 OD 的垂线，垂足为 E．该图形可以完成的所有的无字证明为　（　　）



A. $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$（$a$>0，$b$>0）　　B. $a^2+b^2\geq 2ab$（a>0，b>0）

C. $\sqrt{ab}\geq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$（$a$>0，$b$>0）　　D. $\frac{a^2+b^2}{2}\geq\frac{a+b}{2}$（$a$≥0，$b$>0）

9 已知$a>b>c$，$n\in N$且$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geq\frac{n}{a-c}$，则$n$的最大值为________.

10 已知正实数x，y满足等式$2x+5y=20$.

（1）求$u=\lg x+\lg y$的最大值；

（2）若不等式$\frac{10}{x}+\frac{1}{y}\geq m^2+4m$恒成立，求实数$m$的取值范围.

11. 已知命题p:关于x的方程$x^2-2ax+a^2+a-2=0$有实数根，命题q: $m-1\leq a\leq m+3$.

(1)若命题$\neg p$是真命题，求实数a的取值范围;

(2)若p是q的必要不充分条件，求实数m的取值范围.

12. 设函数$f(x)=x+2-2|x-2|$.

(1)求不等式$f(x)\leq 1$的解集；

(2)若函数$f(x)$的最大值为m，正实数p，q满足$p+2q=m$，求$\frac{2}{p+2}+\frac{1}{q}$的最小值.

不等式答案

小题热身：

1.D

2．① $a=-\frac{1}{2}$；② $[-3,0)$

3 $x<1$或$x>3$

4.A

5 $2\sqrt{6}+5$

6. BC

例题讲解：

例 1① 4 ;② 当a=0 时,不等式解集为$\{x\mid x\le 2\}$;当$a<0$时，不等式解集为$\{x\mid a+\frac{1}{a}\le x\le 2\}$;当a=1 时，不等式的解集为 R；当a>0 且$a\ne 1$时,不等式的解集为$\{x\mid x\ge a+\frac{1}{a}$或$x\le 2\}$.

例 2 解：(1)每年的费用支出是以 6 为首项，2 为公差的等差数列，
依题意$f(n)=25n-[6n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2]-49=-n^2+20n-49$，
令$f(n)>15$得$n^2-20n+64<0$，解得$4<n<16$，
故车主第 5 年开始获利超过 15 万元；
(2)对方案一：利润$f(n)=-(n-10)^2+51$
所以当$n=10$时，利润取得最大值，为 51 万元
此时出售货车，共获利$51+4=55$万元，
对方案二：年平均获利$\frac{f(n)}{n}=20-(n+\frac{49}{n})\le 20-2\sqrt{49}=6$万元
所以当$n=\frac{49}{n}$即$n=7$时，年平均获利最大，
此时出售货车，共获利$6\times 7+13=55$万元，
这两种方案车主均获利 55 万元，但方案一用时 10 年，而方案二只需 7 年，用时较少，故建议车主采用方案二处理这辆货车，

巩固练习：

1. ACD

2 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$

3 B

4 $3+6\sqrt{2}$

5 $\frac{5}{2}$

6 $(-\infty,30)$

7.4

8 AC

9　14

10 ① 1；② $\left[-\frac{9}{2},\frac{1}{2}\right]$

11（1）因为命题$\neg p$是真命题，所以 p 是假命题，

所以对于方程$x^2-2ax+a^2+a-2=0$，

有$\Delta=(-2a)^2-4(a^2+a-2)<0$，即$4a-8>0$，

解得$a>2$，

故实数 a 的取值范围是$\{a|a>2\}$.

(2)如果 p 是 q 的必要不充分条件，

那么 q 能推出 p，但由 p 不能推出 q，

因此$\{a|m-1\le a\le m+3\}\subsetneqq\{a|a\le 2\}$，

因此$m+3\le 2$，解得$m\le -1$，

故实数 m 的取值范围是$\{m|m\le -1\}$.

12 (1)不等式等价于$\begin{cases}x\leqslant 2\\3x-2\leqslant 1\end{cases}$或$\begin{cases}x>2\\-x+6\leqslant 1\end{cases}$，

解得$x\leqslant 1$ 或$x\geqslant 5$，

故不等式的解集为$\left\{x|x\leqslant 1\text{ 或}x\geqslant 5\right\}$.

$$(2)\because f(x)=\begin{cases}3x-2,x\leqslant 2\\-x+6,x>2\end{cases},$$

$\therefore f(x)_{\max}=4$，$\therefore m=4$，

$\therefore p+2q=4$，$p>0$，$q>0$，$\therefore p+2+2q=6$，

$\therefore\frac{2}{p+2}+\frac{1}{q}=(\frac{2}{p+2}+\frac{1}{q})\cdot\frac{p+2+2q}{6}=\frac{1}{6}(2+2+\frac{4q}{p+2}+\frac{p+2}{q})\geqslant\frac{1}{6}(4+2\sqrt{\frac{4q}{p+2}\cdot\frac{p+2}{q}})=\frac{1}{6}(4+4)=\frac{4}{3}$，

$\therefore\frac{2}{p+2}+\frac{1}{q}$的最小值为$\frac{4}{3}$，当且仅当$p=1,q=\frac{3}{2}$时取等号.