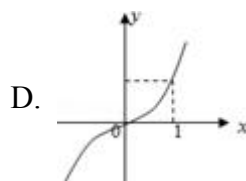
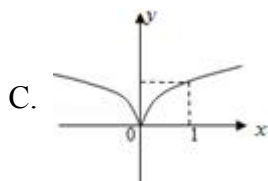
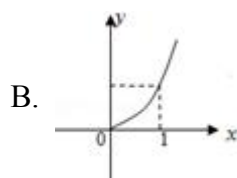
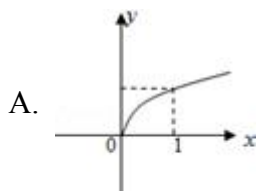


高一数学小练（六）

期中复习专题：函数

一、选择题（本大题共 8 小题，共 40.0 分）

- 下列选项中，表示的是同一函数的是（ ）
A. $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = (\sqrt{x})^2$
B. $f(x) = x^2$, $g(x) = (x-2)^2$
C. $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, $g(t) = |t|$
D. $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x^2-1}$
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0 \\ 3^x, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $f(f(\frac{1}{4}))$ 的值是（ ）
A. $-\frac{1}{9}$ B. -9 C. $\frac{1}{9}$ D. 9
- 设 $f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 2^x + 2x - b$ (b 为常数)，则 $f(-1) =$ （ ）
A. -5 B. -3 C. 5 D. 3
- 已知 $f(x) = \lg(10+x) + \lg(10-x)$ ，则 $f(x)$ 是（ ）
A. $f(x)$ 是奇函数，且在 $(0,10)$ 是增函数
B. $f(x)$ 是偶函数，且在 $(0,10)$ 是增函数
C. $f(x)$ 是奇函数，且在 $(0,10)$ 是减函数
D. $f(x)$ 是偶函数，且在 $(0,10)$ 是减函数
- 下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的是（ ）
A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = e^{-x}$ C. $y = -x^2 + 1$ D. $y = -\lg|x|$
- 函数 $f(x) = a^x + \log_a(x+1)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在 $[0, 1]$ 上的最大值和最小值之和为 a ，则 a 的值为（ ）
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4
- 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递减，则使得 $f(2^x) > f(-\frac{1}{2})$ 成立的 x 的取值范围是（ ）
A. $(-1, 1)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C. $(-\infty, -1)$ D. $(1, +\infty)$
- 已知指数函数 $f(x) = a^{x-16} + 7$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 P ，若定点 P 在幂函数 $g(x)$ 的图象上，则幂函数 $g(x)$ 的图象是



二、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

9. 函数 $y = \sqrt{\log_2(x-2)}$ 的定义域为_____.

10. 函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，并且当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x) = 2^x$ ，那么，

$$f(\log_2 \frac{1}{3}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

11. 若函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - ax + 3a)$ 在区间 $(2, +\infty)$ 上是减函数，则 a 的取值范围为_____.

12. 已知定义在实数集 R 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是减函数，则不等式 $f(1) < f(\ln x)$ 的解集是_____.

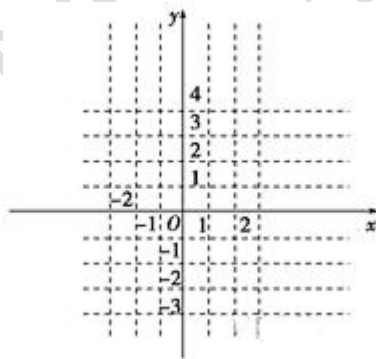
三、解答题（本大题共 2 小题，共 24.0 分）

13. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数，当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2 - 2x$

(1) 求出函数 $f(x)$ 在 R 上的解析式；

(2) 画出函数 $f(x)$ 的图象，并根据图象写出 $f(x)$ 的单调区间.

(3) 求使 $f(x) = 1$ 时的 x 的值.



14. 已知函数 $f(x) = \log_a(3x+1)$, $g(x) = \log_a(1-3x)$, ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

(1) 求函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ 的定义域；

(2) 判断 $F(x) = f(x) - g(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

(3) 确定 x 为何值时，有 $f(x) - g(x) > 0$.

亞森貝爾

答案和解析

1. 【答案】C

【解析】

解:对于 A: $f(x)=\sqrt{x^2}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $g(x)=(\sqrt{x})^2$ 定义域为 $\{x|x\geq 0\}$, 定义域不相同, $\therefore$ 不是同一函数;

对于 B: $f(x)=x^2$, $g(x)=(x-2)^2$ 它们的定义域为 $\mathbb{R}$, 但对相应不相同, $\therefore$ 不是同一函数;

对于 C: $f(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x< 0 \end{cases}$, $g(t)=|t|=\begin{cases} t, & t\geq 0 \\ -t, & t< 0 \end{cases}$, 它们的定义域为 $\mathbb{R}$, 对相应相同, $\therefore$ 是同一函数;

对于 D: $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$ 的定义域为 $\{x|x\geq 1\}$, $g(x)=\sqrt{x^2-1}$ 的定义域为 $\{x|x\geq 1 \text{ 或 } x\leq -1\}$, 定义域不相同, $\therefore$ 不是同一函数;

故选: C.

根据两个函数的定义域相同, 对应关系也相同, 判断它们是同一函数即可.

本题考查了判断两个函数是否为同一函数的问题, 是基础题目.

2. 【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查复合函数求函数值, 根据条件逐层计算即可, 属基础题.

【解答】

解: 由题意可知 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_2 \frac{1}{4}=-2$,

所以 $f\left(f\left(\frac{1}{4}\right)\right)=f(-2)=3^{-2}=\frac{1}{9}$.

故选 C.

3. 【答案】B

【解析】

解: $\because f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 当 $x\geq 0$ 时, $f(x)=2^x+2x-b$ (b 为常数),

$\therefore f(0)=1-b=0$, 得 $b=1$,

则当 $x\geq 0$ 时, $f(x)=2^x+2x-1$,

则 $f(-1)=-f(1)=-(2+2-1)=-3$,

故选: B.

根据函数奇偶性的性质, 利用 $f(0)=0$ 求出 b 的值, 结合函数奇偶性的性质进行转化即可.

本题主要考查函数值的计算, 根据函数奇偶性的性质进行转化求解即可.

4. 【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查了函数的单调性和函数的奇偶性问题, 考查转化思想, 是一道基础题.

求出函数的定义域, 根据函数奇偶性的定义以及复合函数的单调性判断即可.

【解答】

解: 由 $\begin{cases} 10+x > 0 \\ 10-x > 0 \end{cases}$ 得: $x \in (-10, 10)$,

故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-10, 10)$, 关于原点对称,

又由 $f(-x) = \lg(10-x) + \lg(10+x) = f(x)$,

故函数 $f(x)$ 为偶函数,

而 $f(x) = \lg(10+x) + \lg(10-x) = \lg(100-x^2)$,

$y=100-x^2$ 在 $(0, 10)$ 递减, $y=\lg x$ 在 $(0, 10)$ 递增,

故函数 $f(x)$ 在 $(0, 10)$ 递减,

故选 D.

5. 【答案】C

【解析】

解: 由于 $y = \frac{1}{x}$ 为奇函数, 故排除 A;

由于 $y=f(x)=e^{-x}$, 不满足 $f(-x)=-f(x)$, 也不满足 $f(-x)=f(x)$, 故它是非奇非偶函数, 故排除 B;

由于 $y=-x^2+1$ 是偶函数, 且在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 C 满足条件;

由于 $y=\lg|x|$ 是偶函数, 但在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故排除 D,

故选: C.

利用函数的单调性和奇偶性的定义, 逐一判断各个选项中的函数是否满足条

件, 从而得出结论.

本题主要考查函数的单调性和奇偶性, 属于基础题.

6. 【答案】B

【解析】

解: $y=a^x$, $y=\log_a(x+1)$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 在 $[0, 1]$ 上单调性相同,

可得函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 的最值之和为 $f(0)+f(1)=1+a+\log_a 2=a$,

即有 $\log_a 2=-1$,

解得 $a=\frac{1}{2}$,

故选 B.

由于 $y=a^x$, $y=\log_a(x+1)$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 在 $[0, 1]$ 上单调性相同, 可得函数 $f(x)$

在 $[0, 1]$ 的最值之和为 $f(0)+f(1)=a$, 解方程即可得到所求值.

本题考查指数函数和对数函数的单调性及应用, 考查运算能力, 属于中档题.

7. 【答案】C

【解析】

解: $\because$ 偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递减,

$\therefore$ 不等式 $f(2^x) > f(-\frac{1}{2})$ 等价于 $f(2^x) > f(\frac{1}{2})$,

即 $2^x < \frac{1}{2}$, 即 $x < -1$,

即 x 的取值范围是 $(-\infty, -1)$,

故选: C.

根据函数奇偶性和单调性的关系将不等式进行转化求解即可.

本题主要考查不等式的求解, 结合函数奇偶性和单调性的性质进行转化是解

决本题的关键.

8. 【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查指数函数与幂函数知识, 属于基础题. 用好函数的性质是解题关键.

【解答】

解:由指数函数的性质可知 $P(16,8)$,

$$\therefore 8=16^{\alpha},$$

$$\therefore \alpha=\frac{3}{4}.$$

$$\therefore g(x)=x^{\frac{3}{4}},$$

$\therefore$ 其图象是 A.

故选 A.

9.【答案】 $[3, +\infty)$

【解析】

解:要使原函数有意义,则 $\log_2(x-2) \geq 0$,

即 $x-2 \geq 1$, 解得: $x \geq 3$.

所以,原函数的定义域为 $[3, +\infty)$.

故答案为 $[3, +\infty)$.

使原函数有意义,需要根式内部的对数式大于等于 0,然后求解对数不等式即可.

本题考查了函数的定义域及其求法,考查了对数不等式的解法,求解对数不等式时需要保证真数大于 0,此题是基础题.

10.【答案】-3

【解析】

解: $\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数

$$\therefore f(\log_2 \frac{1}{3}) = -f(\log_2 3)$$

$$\because x \in (0, +\infty) \text{ 时, } f(x) = 2^x,$$

$$\therefore f(\log_2 3) = 2^{\log_2 3} = 3$$

$$\therefore f(\log_2 \frac{1}{3}) = -3$$

故答案为:-3

先利用奇函数的定义,将所求函数值转换为求 $f(\log_2 \frac{1}{3})$,再利用已知函数解

析式, 求得 $f(\log_2 3)$, 进而得所求函数值.

本题主要考查了奇函数的定义及其应用, 同时考查了转化化归的思想方法, 属于基础题.

11. 【答案】 $[-4, 4]$

【解析】

解: 令 $t = x^2 - ax + 3a > 0$, 则 $y = \log_{\frac{1}{2}} t$,

由 $t = x^2 - ax + 3a$ 图象的对称轴为 $x = \frac{a}{2}$, 且 $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调减,

函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - ax + 3a)$ 在区间 $(2, +\infty)$ 上是减函数,

所以 $t = x^2 - ax + 3a$ 在区间 $(2, +\infty)$ 上为增函数(同增异减)

所以 $2 \geq \frac{a}{2}$, 且 $4 - 2a + 3a \geq 0$,

解得: $a \in [-4, 4]$,

故答案为: $[-4, 4]$.

先将原函数分解为两个基本函数, $y = \log_{\frac{1}{2}} t$, $t = x^2 - ax + 3a$ 再利用复合函数的单调性求解.

本题主要考查二次函数的性质, 复合函数的单调性, 要注意两点: 一是同增异减, 二是定义域.

12. 【答案】 $(0, \frac{1}{e}) \cup (e, +\infty)$

【解析】

解: $\because$ 偶函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是减函数,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数,

则不等式等价于 $f(1) < f(|\ln x|)$,

即 $|\ln x| > 1$, 即 $\ln x > 1$ 或 $\ln x < -1$, 解得 $x > e$ 或 $0 < x < \frac{1}{e}$,

即不等式 $f(1) < f(\ln x)$ 的解集是 $(0, \frac{1}{e}) \cup (e, +\infty)$;

故答案为: $(0, \frac{1}{e}) \cup (e, +\infty)$

根据函数奇偶性和单调性的关系将不等式进行转化进行求解即可.

本题考查函数的奇偶性和单调性、对数不等式. 利用函数奇偶性和单调性的

关系将不等式进行转化是解决本题的关键.

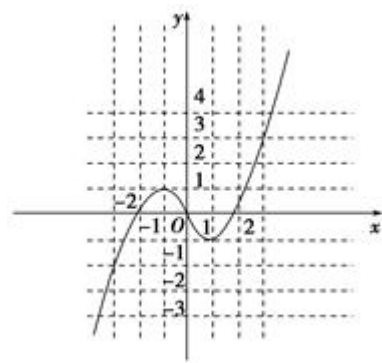
13. 【答案】解: (1) ①由于函数 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数, 则 $f(0) = 0$;

②当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$.

所以 $f(x) = -f(-x) = -[(-x)^2 - 2(-x)] = -x^2 - 2x$.

$$\text{综上: } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^2 - 2x, & x < 0 \end{cases} \quad \cdots (4 \text{ 分}).$$

(2) 图象如图所示.



单调增区间: $(-\infty, -1], [1, +\infty)$

单调减区间: $(-1, 1) \cdots (8 \text{ 分}).$

(3) 当 $x > 0$ 时, $x^2 - 2x = 1$

解得 $x = 1 + \sqrt{2}$ 或 $x = 1 - \sqrt{2}$

因为 $x > 0$, 所以 $x = 1 + \sqrt{2}$

当 $x < 0$ 时, $-x^2 - 2x = 1$

解得 $x = -1$ (满足条件)

综上所述, $x = 1 + \sqrt{2}$ 或 $x = -1 \cdots (12 \text{ 分}).$

【解析】

(1) 通过①由于函数 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数, 则 $f(0) = 0$; ②当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 利用 $f(x)$ 是奇函数, $f(-x) = -f(x)$. 求出解析式即可.

(2) 利用函数的奇偶性以及二次函数的性质画出函数的图象, 写出单调增区间, 单调减区间.

(3) 利用当 $x > 0$ 时, $x^2 - 2x = 1$, 当 $x < 0$ 时, $-x^2 - 2x = 1$, 分别求解方程即可.

本题考查二次函数的简单性质, 分段函数的应用, 考查数形结合以及计算能力.

14. 【答案】解: (1) $F(x) = f(x) - g(x) = \log_a(3x+1) - \log_a(1-3x)$,

$$\therefore \begin{cases} 3x+1 > 0 \\ 1-3x > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}.$$

$$\therefore F(x) = f(x) - g(x) \text{ 的定义域是 } \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

(2) 由(1)知 $F(x)$ 定义域关于原点对称,
 $\because F(x) = \log_a(3x+1) - \log_a(1-3x)$,
 $F(-x) = \log_a(-3x+1) - \log_a(1+3x) = -F(x)$.
 $\therefore F(x) = f(x) - g(x)$ 是奇函数;
(3) $\because f(x) - g(x) > 0$,
 $\therefore f(x) > g(x)$,
即 $\log_a(3x+1) > \log_a(1-3x)$,

①当 $a > 1$ 时, $\begin{cases} 3x+1 > 1-3x \\ -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} \end{cases}$, 解得 $0 < x < \frac{1}{3}$.

②当 $0 < a < 1$ 时, $\begin{cases} 3x+1 < 1-3x \\ -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} \end{cases}$, 解得 $-\frac{1}{3} < x < 0$.

综上所述: 当 $a > 1$ 时, $f(x) - g(x) > 0$ 的解是 $0 < x < \frac{1}{3}$.

当 $0 < a < 1$ 时, $f(x) - g(x) > 0$ 的解是 $-\frac{1}{3} < x < 0$.

【解析】

本题考查了对数函数的定义域, 单调性及奇偶性的判断和分情况讨论思想.

(1) 由真数大于零即可列出方程组 $\begin{cases} 3x+1 > 0 \\ 1-3x > 0 \end{cases}$, 解出即可;

(2) 由 $F(-x) = \log_a(-3x+1) - \log_a(1+3x) = -F(x)$, 再结合定义域即能得出答案.

(3) 不等式 $f(x) - g(x) > 0$ 转化为 $\log_a(3x+1) > \log_a(1-3x)$, 然后分当 $a > 1$ 时和 $0 < a < 1$ 两种情况进行讨论, 利用对数函数的单调性列出方程组即得答案.