

# 新高考数学命题三大情境的思考

朱旭颖 (浙江省杭州市余杭文昌高级中学 311121)

**摘要:**分析新高考数学命题三大情境的内涵,结合2020年新高考数学试题给出三大情境的呈现形式,预测2021年新高考数学命题三大情境的趋势.

**关键词:**新高考;数学命题;应用能力;创新实践

## 1 高考数学命题的三大情境解读

2020年初《中国高考评价体系》和《中国高考评价体系说明》由人民教育出版社出版发行,两个文献分别从“高考的核心功能、考查内容、考查要求三个方面回答为什么考、考什么、怎么考等考试的根本性问题,从而给出培养什么人、怎样培养人、为谁培养人这一教育根本问题在高考领域的答案”<sup>[1]</sup>.这将成为未来新高考改革、高考命题和高考实践的重要指南,也将成为学生复习备考的重要参考.

数学的情境包括引入数学概念时的情境、学习数学原理时的情境、学习数学运算时的情境、数学推理过程中的问题情境等.教学中要引导学生关注已有数学知识的基础和准备程度.这些情境是学生最熟悉的问题情境,在高考数学命题试卷中比例最高.

科学(创新)的情境包括推演数学命题、数学探究、数据分析、数学实验等问题情境,与21世纪最新科学技术紧密联系,关注与未来学习的关联和数学学科内部的更深入的探索.这些情境检测平时数学研究性学习或数学探究活动的学习,与数学本质关联度最高、难度较大,是区分学生数学思维水平的试金石.

现实的情境是社会文化与经济生活的实践情境,需要考生将观察到的现实现象与学科知识、方法建立联系,应用学科工具解决问题,关注数学学科与其他学科和社会实践的关联.这些情境需要在“用数学眼光看世界”理念引领下,引导学生学会观察,学会综合分析现实问题中的数学模型,并培养学生数学应用意识,检测学生数学建模的意识、能力与素养.

## 2 2020年新高考数学命题三大情境

### 2.1 新高考数学中现实情境题大增

2020年新高考北京、天津、山东、海南数学过渡卷中,数学应用题(含数学文化)增多,且有不良结构(开放)题、多项选择题等新题型的进入,特别是大量引入应用性和探究性试题,新高考数学命题的变化也都体现在应用性、创新性、开放性、选择性上.研究发现,新高考数学试卷阅读量与应用题数量呈现正相关性,2020年山东卷有1 080多字,而全国卷1

理科仅670多字,江苏卷800多字;从应用题题量看,山东卷有7题,全国卷I理科仅有3题,江苏卷4题.

#### · 现实情境紧密联系社会热点

引导学生“用数学眼光观察现实世界”,尤其是现实社会热点,有利于培养学生数学应用的意识.

**例1** (2020年山东卷第6题)基本再生数 $R_0$ 与世代间隔 $T$ 是新冠肺炎的流行病学基本参数,基本再生数指一个感染者传染的平均人数,世代间隔是指相邻两代间传染所需的平均时间.在新冠肺炎疫情初始阶段,可以用指数模型: $I(t)=e^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 $t$ (单位:天)的变化规律,指数增长率 $r$ 与 $R_0, T$ 近似满足 $R_0=1+rT$ .有学者基于已有数据估计出 $R_0=3.28, T=6$ ,据此,在新冠肺炎疫情初始阶段,累计感染病例数增加1倍需要的时间约为 $(\ln 2 \approx 0.69)$ ( ).

- A. 1.2天                      B. 1.8天  
C. 2.5天                      D. 3.5天

#### · 现实情境检测数学建模能力

数学建模能力应该在解决现实问题的过程中,在实践、体验、感悟和获得基本经验的过程中形成.现实生活中类似的问题有很多,只有学会用数学的方法去思考世界,用数学的语言去表达世界,数学建模能力才会逐步提升.

**例2** (2020年北京卷第15题)为满足人们对美好生活的向往,环保部门要求相关企业加强污水治理,排放未达标的企业要限期整改.设企业的污水排放量 $W$ 与时间 $t$ 的关系为 $W=f(t)$ ,用 $-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小评价在 $[a, b]$ 这段时间内企业污水治理能力的强弱.已知整改期内,甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如图1所示.给出下列四个结论:

- ①在 $[t_1, t_2]$ 这段时间内,甲企业的污水治理能力比乙企业强;  
②在 $t_2$ 时刻,甲企业的污水治理能力比乙企业强;

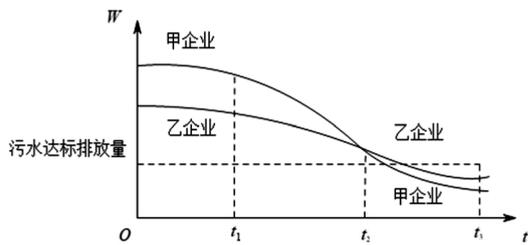


图 1

③ 在  $t_3$  时刻,甲、乙两企业的污水排放量都已达标;

④ 甲企业在  $[0, t_1]$ ,  $[t_1, t_2]$ ,  $[t_2, t_3]$  这三段时间中,在  $[0, t_1]$  的污水治理能力最强.

其中所有正确结论的序号是 \_\_\_\_\_.

· 现实情境紧密联系数学文化

数学源于现实生活中的方方面面,经历一代一代的数学家的抽象和归纳得到,蕴含着大量的文化元素,通过课堂再现使得数学文化得以延续.近几年的高考数学命题中,体现数学文化的试题渐渐成为高考数学的标配.

**例 3** (2020 年高考山东卷第 4 题)日晷是中国古代用来测定时间的仪器,利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间.把地球看成一个球(球心记为  $O$ ),地球上一点  $A$  的纬度是指  $OA$  与地球赤道平面所成角,点  $A$  处的水平面是指过点  $A$  且与  $OA$  垂直的平面.在点  $A$  处放置一个日晷,若晷面与赤道所成平面平行,点  $A$  处的纬度为北纬  $40^\circ$ ,则晷针与点  $A$  处的水平面所成角为( ).

A.  $20^\circ$     B.  $40^\circ$     C.  $50^\circ$     D.  $90^\circ$



图 2

## 2.2 新高考数学中科学情境紧贴数学概念

数学不仅仅是数量关系与空间形式的学科,数学也是研究自然现象、解释空间形式和关系的基础,比如无人机大战、无人机专投等都是数学模型的应用.科学情境可以激发学生用数学思维思考世界,用数学概念与方法解释科学现象与概念.

新定义试题是高考数学命题的一种常见形式,命题者把科学技术中的基本概念与数学概念紧密联系起来,即关联层次的情境,要求应试者将新概念与自己学习的知识迅速联想,理解题目的内涵,从而寻找到解决问题的突破口.

**例 4** (2020 年山东卷第 12 题)信息熵是信息论中的一个重要概念.设随机变量  $X$  所有可能的值为  $1, 2, 3, \dots, n$  且  $P(X=i) = p_i > 0 (i=1, 2, 3, \dots, n)$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ , 定义  $X$  的信息熵  $H(x) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$ , 则( ).

A. 若  $n=1, p_1=1$ , 则  $H(X)=0$

B. 若  $n=2$ , 则  $H(X)$  随着  $p_i$  的增大而增大

C. 若  $p_i = \frac{1}{n} (i=1, 2, 3, \dots, n)$ , 则  $H(X)$  随着  $n$

的增大而增大

D. 若  $n=2m$ , 随机变量  $Y$  所有可能的取值为  $j=1, 2, 3, \dots, m$ , 且  $P(Y=j) = p_j + p_{2m+1-j} (j=1, 2, 3, \dots, m)$ , 则  $H(X) \leq H(Y)$ .

## 2.3 新高考数学中数学情境重在推理

毫无疑问,新高考数学命题中的数学情境是检测学生中学阶段所学数学知识的主干内容,重在逻辑推理、构建数学结构与模型识别.

· 数学主干内容是逻辑推理主题

**例 5** (2020 年山东卷第 16 题)已知直四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长均为 2,  $\angle BAD = 60^\circ$ , 以  $D_1$  为球心、 $\sqrt{5}$  为半径的球面与侧面  $BCC_1B_1$  的交线长为 \_\_\_\_\_.

《课标》案例 11“正方体截面的探究”、案例 24“四棱锥中的平行问题”、案例 31“圆柱体截面的问题”都需要有较强的转化与化归能力.本题完全吻合《课标》要求,需要学生熟悉一些基本的空间几何体的模型.

· 数学情境问题解决重在数学运算能力

数学情境主干内容函数、三角、数列、解析几何、立体几何等都离不开基本繁杂的运算,没有强大的运算能力,是不可能任何数学测试中获得成功的.

**例 6** (2020 年山东卷第 18 题)已知公比大于 1 的等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_2 + a_1 = 20, a_3 = 8$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  通项公式;

(2) 记  $b_m$  为  $\{a_n\}$  在区间  $(0, m] (m \in \mathbf{N}^*)$  中的项的个数, 求数列  $\{b_m\}$  的前 100 项和  $S_{100}$ .

此问题第(2)问需要学生在数字运算过程中进行逻辑推理.

· 数学情境问题解决靠四大思想

高考数学离不开数学思想的引领,尤其在数学情境中,函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想、等价转化与化归思想是数学情境的内在本质.

**3** 2021 年新高考数学命题三大情境的内容与落点

高考数学命题中任何情境离不开中学数学基本

内容,但是情境更加新颖,设问角度更加触及数学学科的核心素养的要求,且体现高中数学课程标准评价中的味道.

### 3.1 内容

根据《课标》的评价要求,2021年新高考数学命题仍处在过渡阶段,三大情境的内容所呈现的三大层次仍保持2020年的特色,应用性与创新性仍是主流.

### 3.2 落点

根据《课标》中评价的内容要求,对新课改背景下的数学教学落点给出如下建议.

第一是对有可能考到的知识点尽量讲深、讲透.这不会增加负担,反而是在给学生提供更多的弹药,与其拿出一节课、半节课讲一道难题,不如讲与难题相关的知识点,并用相应的知识点来解决难题.

**例7** (2020年山东卷第22题)已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,且过点 $A(2,1)$ .

(1)求椭圆 $C$ 的方程;

(2)点 $M, N$ 在椭圆 $C$ 上,且 $AM \perp AN, AD \perp MN, D$ 为垂足,证明:存在定点 $Q$ ,使得 $DQ$ 为定值.

此题第(2)问是难题,但离不开直线与圆锥曲线的基本模式:联立直线与圆锥曲线方程—利用韦达定理建立交点坐标与参数间数量关系—化简参变量函数(双参数化为单参数)—建立某个主变量(如面积)函数或点斜式直线方程等.圆锥曲线问题中障碍最多的就是运算,根据问题涉及的代数式结构,训练突破结构难点的方法最重要.

第二是重视训练题的应用性和创新性.如前所述,数学已不仅仅是数量关系与空间形式的学科,数学知识的应用与创新能力需要通过数学应用意识与学科素养来提升,高考命题中引入多项选择题、开放(结构不良)题、数据分析题、举例题、逻辑分析题正是检验学生的创新能力的改革举措,2020年山东卷以解三角形为背景创建结构不良型的开放题,以后以数列为背景或其他主干内容为背景的开放题也将成为可能.

**例8** 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ,数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$ ,\_\_\_\_\_, $a_5 = b_1, 4T_n = 3b_n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ ,是否存在实数 $\lambda$ ,对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $\lambda \leq S_n$ ?若存在,求实数 $\lambda$ 的取值范围;若不存在,请说明理由.

在① $3a_2 + b_2 + b_1 = 0$ ;② $a_1 = b_1$ ;③ $S_3 = -27$ 这三个条件中任选一个补充在上面问题中,并解答

问题.

**审题** 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$ .当 $n=1$ 时,求出 $b_1 = -1$ ;当 $n \geq 2$ 时,利用 $b_n = T_n - T_{n-1}$ 代入递推公式可求出 $b_n = -3b_{n-1}$ ,进而得到 $b_n = -(-3)^{n-1}$ .由题意推导出等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$ 存在最小值,得到

(1)若补充条件 $3a_2 + b_2 + b_1 = 0$ ,利用已知条件求出 $a_2, d$ 得到 $a_n$ ,求出 $S_n$ 的最小值即可得出结论;

(2)若补充条件 $a_1 = b_1$ ,利用已知条件求出 $a_2, d$ 得到 $a_n$ ,利用

(3)若补充条件 $S_3 = -27$ ,利用已知条件求出 $a_2, d$ 得到 $a_n$ ,利用

第三是充分训练代数运算.运算多么熟练都不过分,解析几何与立体几何等都会有大量运算,学生在审题与运算中始终要关注代数式、三角式等结构,以便寻找到合理的运算途径.

**例9** 求证: $e^t \left( t - \frac{1}{t} - 2 \right) + e^{-t} \left( -t - \frac{1}{2-t} \right) \leq -4e, t \in (0, 1]$ .

**证明** 观察此式的结构特点,将其转化为证明

$$e^t \left( 2 - t + \frac{1}{t} \right) + e^{-t} \left( t + \frac{1}{2-t} \right) \geq 4e.$$

$$\text{左边} \geq 2 \sqrt{e^t \left( 2 - t + \frac{1}{t} \right) e^{-t} \left( t + \frac{1}{2-t} \right)} = 2 \sqrt{e^2 \left[ 1 + 1 + (2-t)t + \frac{1}{t(2-t)} \right]} \geq 4e.$$

很多学生看到此问题,首先想利用导数工具来解决,结果运算过程相当复杂且处处受阻.

第四是作业的有效设计,严格控制作业量.作业可分为学案、巩固作业、“自助餐”(提升素养).学案上课用,引导学生深入概念,了解方法,掌握数学概念的内涵与外延;巩固作业自习课用,下课即收,当天批阅,晚自习发下去;“自助餐”带有详细答案,比如《高考数学自我修炼手册》,不收不批,由学生自主学习.过多的作业会让学生疲于应付,消化不良,尽管平时成绩好一点,高考却很难考好,特别是尖子生会大打折扣,因此要预防学生对教师产生抵触心理,以免对学业成绩造成负面影响.

### 参考文献

[1] 教育部考试中心.中国高考评价体系[M].北京:人民教育出版社,2020.