

§ 1.6 基本不等式

复习目标

1. 结合作差法、几何法，了解基本不等式的证明过程，凸显逻辑推理的核心素养；
2. 结合求函数及二元变量的最值问题，考查灵活运用基本不等式解决问题的能力，凸显数学运算的核心素养；
3. 结合实际应用问题，考查利用基本不等式求最值问题，凸显数学建模的核心素养.

课前热身

1. 已知 $x > 0$, $y > 0$, $xy = 16$, 则 $x + y$ 的最小值为()

A. 32 B. 24 C. $4\sqrt{2}$ D. 8

2. 若 $x > 0$, $y > 0$, 且 $2(x + y) = 36$, 则 $\sqrt{xy}$ 的最大值为()

A. 9 B. 18 C. 36 D. 81

3. 在下列各函数中，最小值等于 2 的函数是()

A. $y = x + \frac{1}{x}$ B. $y = \sin x + \frac{1}{\sin x} \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$ C. $y = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}}$ D. $y = e^x + \frac{4}{e^x} - 2$

4. (多选)若正数 a, b 满足 $a + b = 1$, 则下列说法正确的是()

A. ab 有最大值 $\frac{1}{4}$ B. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 有最小值 $\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 有最小值 4 D. $a^2 + b^2$ 有最小值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 若实数 x, y 满足 $xy = 1$, 则 $x^2 + 2y^2$ 的最小值为_____.

6. 已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $\frac{xy}{2y + 3x} = 1$, 不等式 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \geq m$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

知识梳理

典例研究**考法一 配凑法求最值**

例 1. (1) 已知 $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 1} (x > 0)$, 则 $f(x)$ 的最小值是()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

(2) 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $ab = 1$, 则 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b}$ 的最小值为_____.

考法二 常数代换法求最值

例 2. (1) 已知函数 $y = \log_a(x-1) + 2 (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的图象恒过定点 A. 若直线 $mx + ny = 2$ 过点 A, 其中 m ,

n 是正实数, 则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值是()

- A. $3 + \sqrt{2}$ B. $3 + 2\sqrt{2}$ C. $\frac{9}{2}$ D. 5

(2) 已知 $a > 0$, $b > 0$, $3a + b = 2ab$, 则 $a + b$ 的最小值为_____.

考法三 消元法求最值

例 3. 已知正数 x, y 满足 $x^2 + 2xy - 3 = 0$, 则 $2x + y$ 的最小值是()

- A. 1 B. 3 C. 6 D. 12

考法四 构造不等式求最值

例 4. (1) 已知 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 且 $a+2b=ab-16$, 则 ab 的最小值为()

A. 16 B. 32 C. 64 D. 128

(2) 已知 $x>0, y>0, x+3y+xy=9$, 则 $x+3y$ 的最小值为_____.

考法五 利用换元法求最值

例 5. 已知 $x>0, y>0$ 且 $x+y=5$, 则 $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+2}$ 的最小值为_____.

课堂小结**跟踪反馈**

1. 已知函数 $f(x) = \frac{-x^2}{x+1} (x < -1)$, 则()

A. $f(x)$ 有最小值 4 B. $f(x)$ 有最小值 -4 C. $f(x)$ 有最大值 4 D. $f(x)$ 有最大值 -4

2. 已知正数 x, y 满足 $x+y=1$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{4}{1+y}$ 的最小值为()

A. 2 B. $\frac{9}{2}$ C. $\frac{14}{3}$ D. 5

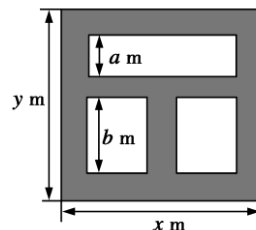
3. (多选) 设 $a > 0$, $b > 0$, 则下列不等式中一定成立的是()

A. $a + b + \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{2}$ B. $\frac{2ab}{a+b} \geq \sqrt{ab}$ C. $\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}} \geq a+b$ D. $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

4. 若 a, b 都是正数, 且 $a+b=1$, 则 $(a+1)(b+1)$ 的最大值为_____.

5. 设 $x > 0$, $y > 0$, 不等式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{m}{x+y} \geq 0$ 恒成立, 则实数 m 的最小值是_____.

6. 某人准备在一块占地面积为 1800 m^2 的矩形地块中间建三个矩形温室大棚, 大棚周围均是宽为 1 m 的小路(如图所示), 大棚总占地面积为 $S \text{ m}^2$, 其中 $a:b=1:2$, 求 S 的最大值.



纠错补偿

1. 订正: 题号

2. 补偿训练: