

考前必会方法, 考场解题有思路

方法1 用充分必要条件诠释导数与函数单调性的关系

(1) $f'(x) > 0$ (< 0) 是可导函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调递增 (减) 的充分不必要条件.

(2) $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) 是可导函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调递增 (减) 的必要不充分条件.

(3) 若 $f'(x)$ 在区间 (a, b) 的任意子区间内都不恒等于零, 则 $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) 是可导函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调递增 (减) 的充要条件.

方法2 已知函数的单调性求解参数取值范围的常用方法

(1) 已知可导函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增 (减) 求参数的取值范围

① 转化为 $f'(x) \geq 0$ (或 $f'(x) \leq 0$) 恒成立问题.

② 处理方法 1 (讨论最值法): 将恒成立问题转化为 $f'(x)_{\min} \geq 0$ (或 $f'(x)_{\max} \leq 0$), 从而构建出关于参数的不等式, 要注意 “=” 是否可以取到.

处理方法 2 (分离参数法): 当参数能够分离出来时, 对于 $m \geq g(x)$ 恒成立的形式, 可转化为 $m \geq g(x)_{\max}$; 对于 $m \leq g(x)$ 恒成立的形式, 可转化为 $m \leq g(x)_{\min}$.

(2) 已知可导函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上存在单调区间求解参数的取值范围

① 转化为 $f'(x) > 0$ (或 $f'(x) < 0$) 在区间 (a, b) 上有解的问题.

② 处理方法 1 (讨论最值法): 将有解问题转化为 $f'(x)_{\max} > 0$ (或 $f'(x)_{\min} < 0$), 从而列出关于参数的不等式.

处理方法 2 (分离参数法): 当参数能够分离出来时, 对于 $m \geq g(x)$ 在区间 (a, b) 上有解的形式, 可转化为 $m \geq g(x)_{\min}$; 对于 $m \leq g(x)$ 在区间 (a, b) 上有解的形式, 可转化为 $m \leq g(x)_{\max}$.

方法3 判断极大、极小值的方法

当函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 且 $f'(x_0) = 0$ 时:

(1) 如果在 $x = x_0$ 附近的左侧 $f'(x) > 0$, 右侧 $f'(x) < 0$, 则 $f(x_0)$ 是极大值;

(2) 如果在 $x = x_0$ 附近的左侧 $f'(x) < 0$, 右侧 $f'(x) > 0$, 则 $f(x_0)$ 是极小值.

方法4 常见的含有导函数的几种不等式构造原函数的类型

(1) 原函数是函数的和、差组合

① 对于 $f'(x) - g'(x) > 0$, 构造函数 $h(x) = f(x) - g(x)$,

一般地, 若 $f'(x) > a$ ($a \neq 0$), 即导函数大于某个非零常数 ($a = 0$ 则无须构造), 则可以构造原函数 $h(x) = f(x) - ax$;

② 对于 $f'(x) + g'(x) > 0$, 构造函数 $h(x) = f(x) + g(x)$.

(2) 原函数是函数的乘、除组合

①对于 $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) > 0 (< 0)$, 构造函数 $h(x) = f(x)g(x)$;

②对于 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) > 0 (< 0)$, 构造函数 $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

特别地, 对于 $xf'(x) + f(x) > 0 (< 0)$, 构造函数 $h(x) = xf(x)$;

对于 $xf'(x) - f(x) > 0 (< 0)$, 构造函数 $h(x) = \frac{f(x)}{x}$.

(3) 原函数是含 e^x 的乘、除组合

①对于 $f'(x) + f(x) > 0 (< 0)$, 构造函数 $h(x) = e^x f(x)$;

②对于 $f'(x) - f(x) > 0 (< 0)$, 构造函数 $h(x) = \frac{f(x)}{e^x}$.

(4) 原函数是含 $\sin x$ ($\cos x$) 的乘、除组合

①对于 $f(x) + f'(x)\tan x > 0 (< 0)$, 构造函数 $h(x) = f(x)\sin x$;

②对于 $f(x) - f'(x)\tan x > 0 (< 0)$, 构造函数 $h(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$;

③对于 $f'(x) - f(x)\tan x > 0 (< 0)$, 构造函数 $h(x) = f(x)\cos x$;

④对于 $f'(x) + f(x)\tan x > 0 (< 0)$, 构造函数 $h(x) = \frac{f(x)}{\cos x}$.

(5) 原函数是含 $\ln x$ 的组合

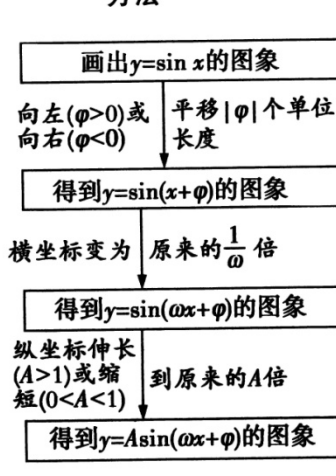
对于 $\frac{f'(x)}{f(x)} > 0 (< 0)$, 分类讨论: ①当 $f(x) > 0$ 时, 构造函数 $h(x) = \ln f(x)$;

②当 $f(x) < 0$ 时, 构造函数 $h(x) = \ln[-f(x)]$.

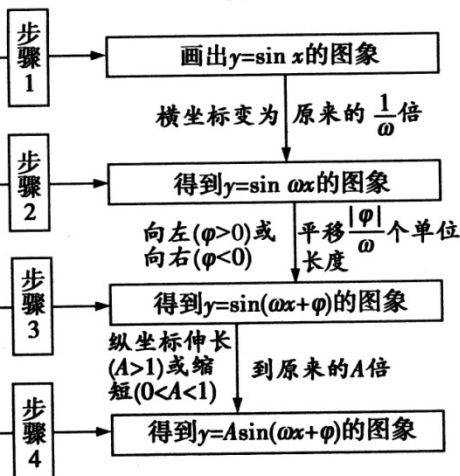
方法5 三角函数的图像变换

由函数 $y = \sin x$ 的图像变换得到 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图像的两种方法.

方法一



方法二



方法6 根据三角函数的图像 (或性质) 求解解析式的基本方法

求函数解析式 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + k$ ($A > 0, \omega > 0$) 是常见问题, 一般和函数周期、最值及图像变换相结合.

(1) A, k 由最值确定, 在一个周期内, 若最大值为 M , 最小值为 m , 则 $A = \frac{M-m}{2}, k = \frac{M+m}{2}$. 特别地, 当 $k=0$ 时, $A = M = -m$.

(2) ω 由周期 T 确定, 即由 $\frac{2\pi}{\omega} = T$ 求出. 常用的确定 T 的方法如下: ①函数图象与 x 轴的相邻两个交点之间的距离为 $\frac{T}{2}$; ②最高点的横坐标和与其相邻的最低点的横坐标相差 $\frac{T}{2}$; ③相邻的两个最低点(最高点)之间的距离为 T ; ④有时还可以从图中读出 $\frac{T}{4}$ 或者 $\frac{3T}{4}$, 从而确定 ω .

(3) φ 值的确定有三种途径.

①代入法: 将图象上的一个已知点的坐标代入求解(此时要注意该点在增区间上还是减区间上).

②五点法: 由特殊点确定, 可以利用最高点或最低点, 也可以利用“零点”. 利用“零点”时, 通常把“五点法”中第一个点 $(x_0, 0)$ (初始点) 作为突破口, 由“第一个点”(图象上升时与 x 轴的交点) 可得等式 $\omega x_0 + \varphi = 2m\pi (m \in \mathbb{Z})$. 再由已知条件中 φ 的具体范围确定相应的 φ 值.

③由图象变换来确定: 由 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) = A\sin[\omega(x + \frac{\varphi}{\omega})]$ 知, “五点法”中的第一个点 $(-\frac{\varphi}{\omega}, 0)$ 就是由原点平移而来的, 可从图中读出此点的横坐标, 让其等于 $-\frac{\varphi}{\omega}$, 即可得到 φ 值.

方法7 三角恒等变换的常用技巧

(1) 常值代换: ①“1”的代换, 如 $1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$, $1 = 2\sin \frac{\pi}{6} = 2\cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}$, $1 = \tan \frac{\pi}{4}$; ②特殊三角函数值的代换.

(2) 角的变换: 利用角与角之间的和、差、倍、互补、互余等关系, 常见的拆角、凑角技巧有 $2\alpha = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)$, $\alpha = (\alpha + \beta) - \beta = (\alpha - \beta) + \beta$, $\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} = (\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta)$, $\frac{\pi}{4} + \alpha = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4} - \alpha)$ 等.

方法8 等差数列的判断方法

(1) 定义法: $a_{n+1} - a_n = d (d \text{ 为常数}, n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等差数列.

(2) 通项公式法: $a_n = pn + q (p, q \text{ 为常数}, n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等差数列.

(3) 等差中项法: $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} (n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等差数列.

(4) 前 n 项和公式法: $S_n = An^2 + Bn (A, B \text{ 为常数}, n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等差数列.

方法9 等比数列的判断方法

(1) 定义法: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q (q \text{ 为常数且 } q \neq 0, n \in \mathbb{N}^*)$ 或 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q (q \text{ 为常数且 } q \neq 0, n \in \mathbb{N}^* \text{ 且 } n \geq 2) \Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等比数列.

(2) 通项公式法: $a_n = a_1 q^{n-1} (a_1, q \text{ 为非零常数}, n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等比数列.

(3) 等比中项法: $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2} (a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等比数列.

方法10 求数列通项公式的常用方法

(1) 公式法: ①等差数列的通项公式; ②等比数列的通项公式.

(2) 已知 $S_n (a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n)$, 求 a_n , 用作差法: $a_n = \begin{cases} S_1 (n=1), \\ S_n - S_{n-1} (n \geq 2). \end{cases}$

(3) 已知 $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = f(n)$, $a_n \neq 0$, 求 a_n , 用作商法: $a_n = \begin{cases} f(1) (n=1), \\ \frac{f(n)}{f(n-1)} (n \geq 2). \end{cases}$

(4) 已知 $a_{n+1} - a_n = f(n)$, 求 a_n , 用累加法: $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = f(n-1) + f(n-2) + \cdots + f(1) + a_1 (n \geq 2)$.

(5) 已知 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$, 求 a_n , 用累乘法: $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = f(n-1) \cdot f(n-2) \cdot \cdots \cdot f(1) \cdot a_1 (n \geq 2)$.

(6) 构造等比数列法: 若已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1} = pa_n + q (p \neq 0, p \neq 1, q \neq 0)$, $a_1 \neq \frac{q}{1-p}$, 设存在非零常数 λ , 使得 $a_{n+1} + \lambda = p(a_n + \lambda)$, 其中 $\lambda = \frac{q}{p-1}$, 则数列 $\{a_n + \frac{q}{p-1}\}$ 就是以 $a_1 + \frac{q}{p-1}$ 为首项, p 为公比的等比数列, 先求出数列 $\{a_n + \frac{q}{p-1}\}$ 的通项公式, 再求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式即可.

(7) 倒数法: 若 $a_n = \frac{ma_{n-1}}{k(a_{n-1} + b)}$ ($m \neq kb, mkb \neq 0, n \geq 2$), 对 $a_n = \frac{ma_{n-1}}{k(a_{n-1} + b)}$ 取倒数, 得到 $\frac{1}{a_n} = \frac{k}{m} \cdot (1 + \frac{b}{a_{n-1}})$, 即 $\frac{1}{a_n} = \frac{kb}{m} \cdot \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{k}{m}$. 令 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 则 $\{b_n\}$ 的递推公式可归纳为 $b_{n+1} = pb_n + q (p \neq 0, p \neq 1, q \neq 0)$ 型.

(8) 猜归纳法: 先由前 n 项猜出一般项, 再进行严格的证明.

方法II 数列求和的常用方法

(1) 公式法: ①等差数列的求和公式; ②等比数列的求和公式.

常用的公式有: (i) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1), n \in \mathbf{N}^*$; (ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), n \in \mathbf{N}^*$; (iii) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2, n \in \mathbf{N}^*$.

(2) 分组求和法: 当无法直接运用公式法求和时, 常先将“和式”中的“同类项”合并在一起, 再运用公式法求和.

(3) 并项求和法: 若数列中相邻两项或几项的和是同一个常数(周期数列)或数列是 $(-1)^n$ 型摆动数列等, 可先将规律的项放在一起, 再求和.

(4) 倒序相加法: 在数列求和中, 若和式中到首尾距离相等的两项的和有共性, 则常考虑选用倒序相加法进行求和.

(5) 错位相减法: 如果一个数列是由一个等差数列与一个等比数列对应项的乘积构成的, 那么常选用错位相减法进行求解.

(6) 裂项相消法: 如果数列的通项公式可分裂成“两项差”的形式, 且相邻项分裂后相关联, 那么常选用裂项相消法求和. 常见的裂项形式有:

$$\textcircled{1} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}; \textcircled{2} \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right);$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right); \textcircled{4} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

方法12 利用基本不等式求最值

(1) 对于正数 x, y , 若积 xy 是定值 p , 则当 $x = y$ 时, 和 $x + y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$.

(2) 对于正数 x, y , 若和 $x + y$ 是定值 s , 则当 $x = y$ 时, 积 xy 有最大值 $\frac{1}{4}s^2$.

(3) 已知正实数 a, b, x, y , 若 $ax + by = 1$, 则有 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = (ax + by) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = a + b + \frac{by}{x} + \frac{ax}{y} \geq a + b + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$, 当且仅当 $by^2 = ax^2$ 时, 等号成立.

(4) 已知正实数 a, b, x, y , 若 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$, 则有 $x + y = (x + y) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} \right) = a + b + \frac{ay}{x} + \frac{bx}{y} \geq a + b + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$, 当且仅当 $ay^2 = bx^2$ 时, 等号成立.