

构造法巧解 2021 年高考数学全国卷试题*

陈香君 (内江师范学院数学与信息科学学院 四川省内江六中 641100)

赵思林 (内江师范学院数学与信息科学学院 641100)

2021 年高考数学全国卷共有六套试卷,各具特点,都很好地落实了数学学科立德树人、服务选才、引导教学的高考核心功能^[1].《普通高中数学课程标准(2017 年版)》明确函数是课程内容的主线之一,其对学生学习函数内容的要求除获得“双基”外,还要感悟和运用函数中蕴含的数学思想方法,促进发展六大核心素养.构造辅助函数是函数思想方法的基础性方法.辅助函数的构造方法很多,包括“超越式”构造、“对称式”构造、“同构式”构造、“引参式”构造等具体方法.运用构造法能够巧妙、简洁地解答 2021 年高考数学全国卷中的一些问题.构造辅助函数也是处理一些地方的模考试题的基本方法.

1 “超越式”构造

例 1 (2021 新高考 I 卷第 7 题)若过点 (a, b) 可以作曲线 $y = e^x$ 的两条切线,则().

- A. $e^b < a$ B. $e^a < b$
C. $0 < a < e^b$ D. $0 < b < e^a$

解 由 $y = e^x$ 的单调性可知,点 (a, b) 不在该曲线上.因此,可设切点为 $P(x_0, y_0)$,则切线的斜率 $k = e^{x_0}$,并且有 $y_0 = e^{x_0}$, $\frac{y_0 - b}{x_0 - a} = e^{x_0}$.化简并整理可得 $1 + a = x_0 + b \cdot e^{-x_0}$.

现在的问题归结为:关于 x_0 的方程 $1 + a = x_0 + b \cdot e^{-x_0}$ 有且仅有 2 个解.这是一个含 2 个参数 a, b 的超越方程,直接求解或获得解的情况均不可能.从而可考虑构造辅助函数,通过研究辅助函数的某些性质(如单调性、极值或最值等),并借助于这些性质,以获得问题的解决.

设 $h(x) = x + be^{-x}$,则需关于 x 的方程 $h(x) = 1 + a$ 有且仅有 2 个解.因为过点 (a, b) 可作曲线 $y = e^x$ 的两条切线,所以 $b > 0$.否则,若 $b \leq 0$,则 $h'(x) = 1 - be^{-x} > 0$, $h(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增,方程 $h(x) = 1 + a$ 不可能有两解.注意到当 $b > 0$ 时,有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) =$

$+\infty$.此时,函数 $h(x) = x + be^{-x}$ 没有最大值.因此,欲使关于 x 的方程 $h(x) = 1 + a$ 有且仅有 2 个解,需且只需 $h(x)_{\min} < 1 + a$.再令 $h'(x) = 1 - be^{-x} = 0$,得 $x = \ln b$. $h(x)$ 在 $(0, \ln b)$ 上单调递减,在 $(\ln b, +\infty)$ 上单调递增,故 $h(x)_{\min} = h(\ln b) = \ln b + 1$.令 $1 + a > \ln b + 1$,解得 $e^a > b$.又 $b > 0$,故选 D.

评析 本题得到 $1 + a = x_0 + b \cdot e^{-x_0}$ 后,容易发现这是一个超越方程,无法直接求解和判断解的情况.于是,考虑构造辅助函数 $h(x) = x + be^{-x}$,通过研究 $h(x)$ 的最小值与 $1 + a$ 的大小关系,建立不等量关系,从而巧妙获解.

函数综合题一般会涉及超越函数,这是高考的重点、难点和热点内容.其处理方法一般是构造辅助函数,利用高阶求导、隐零点转化、精准放缩、设而不求等技巧求解.

2 “对称式”构造

例 2 (2021 新高考全国 I 卷第 22 题)已知函数 $f(x) = x(1 - \ln x)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 a, b 为两个不相等的正数,且 $b \ln a - a \ln b = a - b$,证明: $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$.

解 (1) $f'(x) = -\ln x$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.(由洛必达法则

$$\text{知 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0; f(e) = 0.)$$

0; $f(e) = 0$.)

(2) $b \ln a - a \ln b = a - b \Leftrightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{b} \ln \frac{1}{b}$, 即 $f\left(\frac{1}{a}\right) = f\left(\frac{1}{b}\right)$. 令 $\frac{1}{a} = x_1, \frac{1}{b} = x_2$. 由题意不妨设 $0 < x_1 < 1 < x_2 < e$, 从而即证 $2 < x_1 + x_2 < e$.

先证 $x_1 + x_2 > 2$. 令 $F(x) = f(x) - f(2-x)$, 则 $F'(x) = -\ln x + \ln(2-x)$. 当 $x \in (0, 1)$ 时, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调递增. 又 $F(1) = 0$, 则 $f(x) < f(2-x)$, $f(x_2) = f(x_1) < f(2-x_1)$. 又 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $x_2 \in (1, e)$, $2-x_1 \in (1, 2)$. 所以 $x_2 > 2-x_1$, 也即 $x_1 + x_2 > 2$.

再证 $x_1 + x_2 < e$. $f(x)$ 在点 $(e, 0)$ 处的切线为 $\varphi(x) = e - x$. 令 $G(x) = f(x) - \varphi(x) = 2x - x \ln x - e$, $x \in (0, e)$. $G'(x) = 1 - \ln x > 0$, $G(x)$ 单调递增. 又因为 $G(x) < G(e) = 0$, 所以 $f(x) < \varphi(x)$. 令 $f(x_1) = f(x_2) = t$, 则有 $t = f(x_2) < \varphi(x_2) = e - x_2 \Rightarrow x_2 < e - t$; $t = f(x_1) = x_1(1 - \ln x_1)$, $x_1 \in (0, 1)$ 时, $t = x_1(1 - \ln x_1) > x_1$, 即 $x_1 < t$. 所以 $x_1 + x_2 < e$.

综上所述, $2 < x_1 + x_2 < e$, 即证得 $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$.

评析 本题是典型的极值点偏移问题. 通过观察, 考虑将 $b \ln a - a \ln b = a - b$ 化为对称的式子 $\frac{1}{a} - \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{b} \ln \frac{1}{b}$, 这是解题的关键. 这需要考生有一双发现“对称美”的眼睛, 通过构造一元对称差函数(原函数与切线函数的差函数)巧妙地完成证明.

利用“对称式”函数解题的基本思路可归结为: 恒等变形(配凑)—“对称式”结构—构造辅助函数—探讨辅助函数的性质—应用性质—结论.

3 “同构式”构造

例 3 (2021 全国甲卷理科第 21 题) 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \frac{x^a}{a^x} (x > 0)$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 有且仅有两个交点, 求 a 的取值范围.

解 (1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$, $f'(x) = \frac{x(2-x \ln 2)}{2^x}$. 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x \in (0, \frac{2}{\ln 2})$; 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x \in (\frac{2}{\ln 2}, +\infty)$. 因此, $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, \frac{2}{\ln 2})$, 单调减区间为 $(\frac{2}{\ln 2}, +\infty)$.

(2) 由题设知 $f(x) = 1$ 在 $(0, +\infty)$ 内有两个

不等的实根, 即 $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^a = a^x \Leftrightarrow a \ln x = x \ln a \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}$. 令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$

上单调递减, $g(e) = \frac{1}{e}$, $g(1) = 0$. 又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. 因此, 若要有两个不等的实

根, 则 $0 < \frac{\ln a}{a} < \frac{1}{e}$. 故 $a > 1$ 且 $a \neq e$.

评析 本题虽是压轴题, 但题干中的函数结构特别简单, 经变形容易得到 $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}$. 注意到等式左右的结构完全相同, 即“同构”. 可自然地构造 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$. 再利用导函数的正负判断单调性、求极(最)值即可.

指数、对数间有着密切联系, 同时含有指数、对数的题目常可通过式子的恒等变形、配凑等变换, 得到“同构”的形式, 再构造出辅助函数, 接着探讨函数性质, 最后利用性质解决问题. 这一解题思路可归结为: 恒等变形(配凑)—“同构式”结构—构造辅助函数—研究辅助函数的性质—应用性质—结论.

4 “引参式”构造

例 4 (2021 全国乙卷理科第 12 题) 设 $a = 2 \ln 1.01$, $b = \ln 1.02$, $c = \sqrt{1.04} - 1$, 则().

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$
C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

解 由题知 $a = 2 \ln 1.01 = \ln 1.01^2 = \ln 1.0201 > \ln 1.02 = b$, 所以排除 A 和 D. $a = 2 \ln 1.01 = 2 \ln(1 + 0.01)$, $c = \sqrt{1.04} - 1 = \sqrt{1 + 4 \times 0.01} - 1$. 设函数 $f(x) = 2 \ln(1 + x)$, $g(x) = \sqrt{1 + 4x} - 1$, 并令 $F(x) = f(x) - g(x) = 2 \ln(1 + x) - \sqrt{1 + 4x} + 1$. 于是, 若要判断 a 与 c 的大小, 只需判断 $F(0.01)$ 的正负即可. 对 $F(x)$ 求导得 $F'(x) = \frac{2}{1+x} - \frac{2}{\sqrt{1+4x}} = \frac{2[\sqrt{1+4x} - (1+x)]}{(1+x)\sqrt{1+4x}} (x \geq -\frac{1}{4})$. 令 $F'(x) = 0$, $x_1 = 0, x_2 = 2, x \in (0, 2)$ 时, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调递增. 因为 $0.01 \in (0, 2)$, 所以 $F(0.01) > F(0) = 0$, 因此 $a > c$. 综上, 选 B.

评析 此题是本套试卷中极具创新性、难度

2021 年高考试题中的数学文化

范佳清 张维忠 (浙江师范大学教师教育学院 321004)

数学承载着思想和文化,是人类文明的重要组成部分.数学文化是指数学的思想、精神、语言、方法、观点,以及它们的形成和发展;还包括了数学在人类生活、科学技术、社会发展中作出的贡献和意义,以及与数学相关的人文活动.《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》强调高考试题要融入与渗透数学文化^[1].《中国高考评价体系》强调高考数学在考查过程中增加自然科学、人文与社会科学等多个领域以及现实生活、数学文化中的材料作为试题背景,考查学生运用数学知识解决实际问题的能力,促进学生数学素养的形成和发展^[2].为此,本文围绕 2021 年高考中的

有关数学文化的试题进行分析讨论,以期的高考数学试题编拟和数学文化教学提供启示与借鉴.

1 试题特征

2021 年全国各地共有 10 套高考数学试卷,包括全国甲卷、全国乙卷的文科卷和理科卷,新高考卷 I,新高考卷 II,北京卷,上海卷,浙江卷,天津卷.其中,有关数学文化的试题共有 17 题(文、理科卷中相同的试题视为一道).

借鉴张维忠等的研究,按照内容类型将高考试题中的数学文化分为数学与人文艺术、数学与科技、数学与生活以及数学史^[3],将呈现形式分为附加型、可分离型、不可分离型^[4].

表 1 2021 年全国高考数学文化试题特征

试卷	题号	题型	背景与名称	内容类型	呈现形式	知识点分布
全国甲卷	2	选择题	农村扶贫	数学与生活	可分离型	概率
	4	选择题	视力问题	数学与生活	可分离型	函数
	8	选择题	地理测量	数学与生活	不可分离型	立体几何
	17	解答题	机床生产	数学与生活	可分离型	概率
全国乙卷	6	选择题	冬奥会	数学与生活	可分离型	概率
	9	选择题	刘徽《海岛算经》	数学史	不可分离型	平面几何
	17	解答题	设备生产	数学与生活	可分离型	概率
新高考卷 I	16	解答题	剪纸艺术	数学与人文艺术	附加型	数列求和
	18	解答题	“一带一路”	数学与人文艺术	附加型	概率
新高考卷 II	4	选择题	北斗三号	数学与科技	不可分离型	立体几何
	21	解答题	生命科学	数学与科技	可分离型	概率
北京卷	6	选择题	党旗规格	数学与生活	可分离型	等差数列
	8	选择题	自制雨量器	数学与生活	不可分离型	立体几何
	18	解答题	核酸检测	数学与生活	可分离型	概率
上海卷	10	填空题	场馆参观	数学与生活	可分离型	概率
	19	解答题	企业营业额	数学与生活	可分离型	数列求和
浙江卷	11	填空题	赵爽弦图	数学史	附加型	平面几何

较大的题目之一,是一道值得“小题大做”的好题.在比较 a 与 c 的大小时,由于二者均为离散性的数,不容易直接依据数值的精确计算(估算)比较它们的大小.因此,不考虑孤立地对两个数值进行大小比较,而想到引入变量把具体数值一般化(即数值 — 字母(参数)化),借助于函数这一强大工具,先将数值 0.01 一般化为变量 x ,再将变量 x 赋值为 0.01(这充分体现了“特殊 — 一般 — 特殊”的思维策略).

需要注意的是,引入“参数”应是广义的,不

仅限于自变量,还可利用不等式的性质分离参数、以变换主元等方式引入参数和构造辅助函数来解决疑难问题.

参考文献

- [1] 佚名.加大开放与应用 克服“机械刷题”——教育部考试中心命题专家评析 2021 年高考数学试题[EB/OL](2021-06-08). http://www.jyb.cn/rmtzgjyb/202106/t20210608_595737.html.