江苏省仪征中学 2020—2021 学年度第一学期 高二数学

期末模拟试卷（1）

一、单选题：

1. 已知命题 p：双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$，命题 q：双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$，则 p 是 q 的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充要条件　　D．既不充分又不必要条件

2. 不等式 $\frac{1-x}{x+2}\le 0$ 的解集为（　　）

A．$(-2,1]$　　B．$[-2,1]$　　C．$(-\infty.-2)\cup[1,+\infty)$　　D．$(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

3. 空间向量 $\overrightarrow{AB}=(1,0,-1)$，平面 α 的一个法向量 $\vec{n}=(0,1,1)$，则直线 AB 与平面 α 所成角为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$　　D．$\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

4. 如果关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(-1,2)$，则关于 x 的不等式 $bx^2-ax-c>0$ 的解集为（　　）

A．$(-1,2)$　　B．$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　　C．$(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$　　D．$(-2,1)$

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_3=-4$，$a_7=4$，则（　　）

A．$S_4>S_6$　　B．$S_4=S_5$　　C．$S_6<S_5$　　D．$S_6=S_5$

6. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A,B 两点，点 O 是坐标原点，若 $|AF|=\frac{3}{2}$，则 ΔAOB 的面积为（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

7. 已知 $x>0$，$y>0$，$2x+y+2xy=8$，则 $\sqrt{2x+y}$ 的最小值是（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．2　　C．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D．4

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，以 F_1F_2 为直径的圆与一条渐近线交于点 P（P 在第一象限），PF_1 交双曲线左支于 Q，若 $\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{QF_1}$，则双曲线的离心率为（　　）

A．$\frac{\sqrt{10}+1}{2}$　　B．$\sqrt{10}$　　C．$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　　D．$\sqrt{5}$

二、多选题：

9. 设正实数 x，y 满足 $x+2y=3$，则下列说法正确的是（　　）

A．$\frac{y}{x}+\frac{3}{y}$ 的最小值为 4　　B．xy 的最大值为 $\frac{9}{8}$

C．$\sqrt{x}+\sqrt{2y}$ 的最小值为 $\sqrt{6}$　　D．x^2+4y^2 的最小值为 $\frac{9}{2}$

10．已知抛物线$C: y^2=4x$的焦点为F，准线为l，过点F的直线与抛物线交于两点$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，点P在l上的射影为P_1，则（　　）

A．若$x_1+x_2=6$，则$|PQ|=8$　　B．以PQ为直径的圆与准线l相切

C．设$M(0,1)$，则$|PM|+|PP_1|\geq\sqrt{2}$

D．过点$M(0,1)$与抛物线C有且仅有一个公共点的直线至多有 2 条

11. 设首项为 1 的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_{n+1}=2S_n+n-1$，则下列结论正确的是（　）

A．数列$\{a_n\}$为等比数列　　B．数列$\{S_n+n\}$为等比数列

C．数列$\{a_n\}$中a_{10}=511　　D．数列$\{2S_n\}$的前n项和为$2^{n+2}-n^2-n-4$

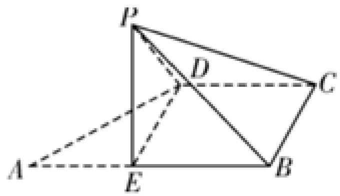
12．如图直角梯形$ABCD$中，$AB//CD$，$AB\perp BC$，$BC=CD=\frac{1}{2}AB=2$，E为AB中点，以DE为折痕把ΔADE折起，使点A到达点P的位置，且$PC=2\sqrt{3}$，则（　）

A．平面$PED\perp$平面PCD

B．$PC\perp BD$

C．二面角$P-DC-B$的大小为$\frac{\pi}{4}$

D．PC与平面PED所成角的正切值为$\sqrt{2}$



三、填空题

13. 命题“$\exists x\in R$，$x>2$”的否定是____________.

14. 已知数列$\{a_n\}$满足$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1(n\in N^*)$，$a_1$=1, 记$b_n=a_na_{n+1}$，则数列$\{b_n\}$的前 2020 项的和为______.

15. 已知P点是椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$上的动点，Q点是圆$x^2+(y-2)^2=1$上的动点，则线段PQ长度的最大值为________.

16. 若关于x的不等式$(a-2)x^2+(4a-10)x+4a-12>0$的解集中恰有两个整数，则实数$a$的取值范围是________.

四、解答题

17.（10 分）已知命题 p ：对任意 $x\in(0,+\infty)$ ，不等式 $a\le x+\dfrac{1}{x}$ 都成立，命题 q ：方程 $\dfrac{x^2}{a-m}+\dfrac{y^2}{a-m-2}=1$ 表示焦点在 x 轴上的双曲线.

（1）若命题 p 是真命题，求实数 a 的取值范围；

（2）若 p 是 q 的必要不充分条件，求实数 m 的取值范围.

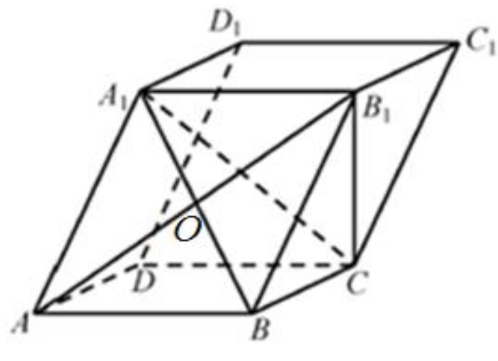
18.（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_1=1, a_{n+1}=2S_n+1(n\in N^*)$ ，等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_3=9$ ，$b_1+27=2b_5$.

（1）求数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的通项公式；　　（2）设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，且 $c_n=a_n\cdot b_n$ ，求 T_n .

19.（12 分）在平行六面体（底面是平行四边形的四棱柱）$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB_1\cap A_1B=O$ ，$AA_1=AB=A_1B=2, AB_1\perp BC$.

（1）求直线 BB_1 与平面 A_1BC 所成的角；

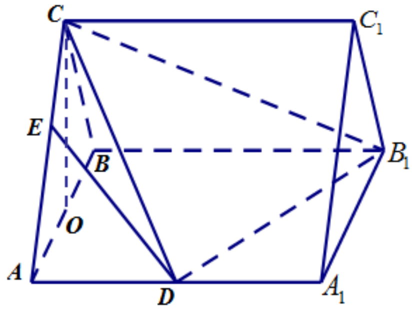
（2）若 $A_1C=2, BC=1$ ，求三棱锥 C_1-A_1BC 的体积.



20.（12 分）如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=BC=CA=AA_1=2$，点 O 为 AB 中点，点 D 为 AA_1 中点.

（1）求平面 ABC 与平面 B_1CD 所成锐二面角的大小；

（2）已知点 E 满足 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}(0\le\lambda\le1)$，当异面直线 DE 与 CB_1 所成角最小时，求实数 λ 的值.



21.（12 分）已知抛物线 C 的方程为 $y^2=2px(p>0)$，直线 $l_1:y=kx+m$ 与抛物线 C 相切于点 $(6,6)$.

（1）求 p、k、m 的值；

（2）已知动直线 $l_2\perp l_1$，且 l_2 与抛物线 C 交于两个不同点 A,B，问抛物线上是否存在定点 P（异于 A,B），使得直线 PA,PB 的倾斜角互补，若存在，求出 P 点坐标，若不存在，说明理由.

22.（12 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，两条准线之间的距离为 $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$，过 $M(1,0)$ 的直线 l 交椭圆于 A,B 两点.

（1）求椭圆 C 的方程；　　（2）若 $OA\perp OB$，且直线 l 与 x 轴不垂直，求直线 l 的斜率；

（3）设 N 为直线 $x=4$ 上任意一点，记直线 AN,MN,BN 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3，判断 k_1,k_2,k_3 是否成等差数列，并给出理由.

期末模拟试卷（1）答案

一、单选题：ACAC　BCBA

二、多选题：ABD　　ABC　　BCD　ABC

三、填空题：　13.　$\forall x \in R$，　$x \le 2$　　14.　$\frac{2020}{2021}$　　15.　$\frac{2\sqrt{21}}{3}+1$　　16.　$(1,\frac{4}{3}$

四、解答题

17、解：(1)因为对任意 $x \in (0,+\infty)$，不等式 $a \le x+\frac{1}{x}$ 成立，所以 $a \le \left[x+\frac{1}{x}\right]_{\min}$　……………2 分

因为 $x \in (0,+\infty)$，所以 $x+\frac{1}{x} \ge 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，　……………4 分

所以 $a \le 2$；　……………5 分

(2)因为方程 $\frac{x^2}{a-m}+\frac{y^2}{a-m-2}=1$ 表示焦点在 x 轴上的双曲线，

所以 $\begin{cases} a-m>0 \\ a-m-2<0 \end{cases}$，即 $m<a<m+2$，　……………7 分

因为 p 是 q 的必要不充分条件，

所以 $(m,m+2) \subseteq (-\infty,2]$ 且 $(m,m+2) \ne (-\infty,2]$　……………9 分

所以 $m+2 \le 2$，即 $m \le 0$。　……………10 分

18、解：(1)因为 $a_{n+1}=2S_n+1$ ①，所以当 $n \ge 2$ 时，$a_n=2S_{n-1}+1$ ②

由①—②得 $a_{n+1}-a_n=2a_n$，即 $a_{n+1}=3a_n(n \ge 2)$，　……………2 分

又当 $n=1$ 时，$a_2=2a_1+1=3$，所以 $a_2=3a_1$，

因为 $a_1 \ne 0$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3,(n \ge 1)$，所以数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，

所以 $a_n=a_1\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$　……………5 分

注：$a_n=3^{n-1}$ 结果对，但是没有验证 $a_2=3a_1$ 的扣 2 分

由题意得 $\begin{cases} b_1+2d=9 \\ b_1+27=2(b_1+4d) \end{cases}$，解得 $\begin{cases} b_1=3 \\ d=3 \end{cases}$，所以 $b_n=3n$；　……………8 分

(2) $c_n = a_n \cdot b_n = 3n \cdot 3^{n-1} = n \cdot 3^n$

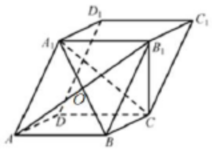
$T_n = 1\cdot 3^1 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \cdots + (n-1)\cdot 3^{n-1} + n\cdot 3^n$ ③

$3T_n = 1\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + 3\cdot 3^4 + \cdots\cdots\cdots\cdots + (n-1)\cdot 3^n + n\cdot 3^{n+1}$ ④

③—④得：$-2T_n = 1\cdot 3^1 + 1\cdot 3^2 + 1\cdot 3^3 + \cdots + 1\cdot 3^n - n\cdot 3^{n+1} = 1\cdot\dfrac{3\cdot(1-3^n)}{1-3} - n\cdot 3^{n+1} = \dfrac{3^{n+1}-3}{2} - n\cdot 3^{n+1}$

所以 $T_n = \dfrac{3}{4} + \dfrac{2n-1}{4}\cdot 3^{n+1}$ ………………….12 分

19、解：在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 A_1ABB_1 是平行四边形，



又 $AA_1 = AB$，所以四边形 A_1ABB_1 是菱形，所以 $AB_1 \perp A_1B$，

又因为 $AB_1 \perp BC$，$A_1B \cap BC = B$，$A_1B \subset$ 平面 A_1BC，$BC \subset$ 平面 A_1BC

所以 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BC， ………………….3 分

所以 BO 是 BB_1 在平面 A_1BC 上的射影， ………………….4 分

所以 $\angle B_1BO$ 即为所求角（或直线 BB_1 与平面 A_1BC 所成的角） ………………….5 分

在菱形 A_1ABB_1 中，$AA_1 = AB = A_1B = 2$，则 $AO = B_1O = \sqrt{3}$，

在 $Rt\Delta B_1BO$ 中，$\sin\angle B_1BO = \dfrac{B_1O}{BB_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以直线 BB_1 与平面 A_1BC 所成的角为 60°. ………………….7 分

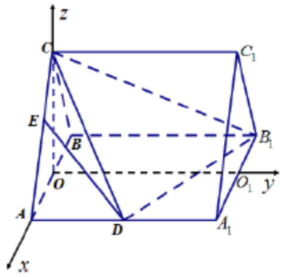
(2)在 ΔA_1BC 中，$A_1C = 2, BC = 1, A_1B = 2$，可求得 $S_{\Delta A_1BC} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ ………………….9 分

在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 BCC_1B_1 是平行四边形，所以 $B_1C_1 // BC$，

所以 C_1 到平面 A_1BC 的距离即为 B_1 到平面 A_1BC 的距离，即高为 $B_1O = \sqrt{3}$ ………………….11 分

所以 $V_{C_1-A_1BC} = V_{B_1-A_1BC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta A_1BC}\cdot B_1O = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}\cdot\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$. ………………….12 分

20. 解：在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB=BC=CA$，



取 A_1B_1 中点 O_1，连 OO_1，则 $OO_1 // AA_1, AB\perp OC$，

又直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AA_1\perp$ 平面 ABC，

而 $AB,OC\subset$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp OC, AA_1\perp AB$，

所以 $OO_1\perp OC, OO_1\perp AB$。

以 $\{OA,OO_1,OC\}$ 为正交基底，建立如图所示空间直角坐标系 $O-xyz$， ....1 分

则 $A(1,0,0), B(-1,0,0), C(0,0,\sqrt{3}), A_1(1,2,0), B_1(-1,2,0), D(1,1,0)$

所以 $\overrightarrow{CD}=(1,1,-\sqrt{3}), \overrightarrow{CB_1}=(-1,2,-\sqrt{3}), \overrightarrow{AC}=(-1,0,\sqrt{3})$，

(1)因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC，所以 $\overrightarrow{n_1}=(0,2,0)$ 是平面 ABC 的一个法向量， ....2 分

设 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$ 是平面 B_1CD 的法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=x+y-\sqrt{3}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=-x+2y-\sqrt{3}z=0\end{cases}$，得 $2x=y, \sqrt{3}y=2z$，

不妨取 $y=2$，则 $x=1, z=\sqrt{3}$，所以 $\overrightarrow{n_2}=(1,2,\sqrt{3})$ 是平面 B_1CD 的一个法向量 ....4 分

所以 $\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{4}{2\cdot\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ....5 分

所以平面 ABC 与平面 B_1CD 所成锐二面角的大小为 $\dfrac{\pi}{4}$. ....6 分

(2)因为 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}=(-\lambda,0,\sqrt{3}\lambda),(0\le\lambda\le1)$，所以 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=(-\lambda,-1,\sqrt{3}\lambda)$，

则 $\cos<\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CB_1}>=\dfrac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB_1}}{|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{CB_1}|}=\dfrac{-(\lambda+1)}{\sqrt{2}\sqrt{4\lambda^2+1}}$， ....8 分

设异面直线 DE 与 CB_1 所成角为 θ，则 $\cos\theta=\left|\cos<\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CB_1}>\right|=\dfrac{\lambda+1}{\sqrt{2}\sqrt{4\lambda^2+1}}$，

令 $t=\lambda+1\in[1,2]$，则 $\cos\theta=\dfrac{t}{\sqrt{2}\sqrt{4(t-1)^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5(\frac{1}{t})^2-8(\frac{1}{t})+4}}$ ....10 分

当 $\dfrac{1}{t}=\dfrac{4}{5}$ 时， $\cos\theta$ 取得最大值，

因为 $y=\cos\theta$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上递减，所以 θ 取得最小值，所以此时 $\lambda=\dfrac{1}{4}$. ....12 分

21、解：（1）因为点$(6,6)$在抛物线上，所以$36=12p$，解得$p=3$， ....2 分

所以抛物线 C 的方程为$y^2=6x$，又点$(6,6)$在直线$y=kx+m$上，所以$6=6k+m$，

由$\begin{cases} y^2=6x \\ y=kx+6-6k \end{cases}$得$ky^2-6y+36-36k=0$，

因为直线与抛物线 C 相切，所以$\Delta=0$，解得$k=\dfrac{1}{2},m=3$

所以，$p=3,k=\dfrac{1}{2},m=3$ ....6 分

（2）方法 1：设$A(\dfrac{y_1^2}{6},y_1),B(\dfrac{y_2^2}{6},y_2),P(\dfrac{n^2}{6},n)$，则

“PA,PB倾斜角互补”$\Leftrightarrow$“$k_{PA}+k_{PB}=0$”，

即$\dfrac{y_1-n}{\dfrac{y_1^2}{6}-\dfrac{n^2}{6}}+\dfrac{y_2-n}{\dfrac{y_2^2}{6}-\dfrac{n^2}{6}}=0$，即$\dfrac{6}{y_1+n}+\dfrac{6}{y_2+n}=0$，即$y_1+y_2=-2n$ ....9 分

又由$k_{AB}=-2$得$\dfrac{y_1-y_2}{\dfrac{y_1^2}{6}-\dfrac{y_2^2}{6}}=-2$，即$\dfrac{6}{y_1+y_2}=-2$，即$y_1+y_2=-3$

所以$2n=3$，即$n=\dfrac{3}{2}$，所以存在定点$P(\dfrac{3}{8},\dfrac{3}{2})$满足要求 ....12 分

方法 2：设$l_2:y=-2x+t$，设$A(\dfrac{y_1^2}{6},y_1),B(\dfrac{y_2^2}{6},y_2),P(\dfrac{n^2}{6},n)$，则

“PA,PB倾斜角互补”$\Leftrightarrow$“$k_{PA}+k_{PB}=0$”，

即$\dfrac{y_1-n}{\dfrac{y_1^2}{6}-\dfrac{n^2}{6}}+\dfrac{y_2-n}{\dfrac{y_2^2}{6}-\dfrac{n^2}{6}}=0$，即$\dfrac{6}{y_1+n}+\dfrac{6}{y_2+n}=0$，即$y_1+y_2=-2n$ ....9 分

由$\begin{cases} y^2=6x \\ y=-2x+t \end{cases}$得$y^2+3y-3t=0$，所以$y_1+y_2=-3$

所以$2n=3$，即$n=\dfrac{3}{2}$，所以存在定点$P(\dfrac{3}{8},\dfrac{3}{2})$满足要求 ....12 分

22、（1）解：由题意得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{a^2}{c}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\ c=\sqrt{3}\end{cases}$，又$a^2=b^2+c^2$，所以$b=1$

所以，椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$； …………………3 分

（2）显然直线l的斜率存在, 设l:$y=k(x-1)$, 代入$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$得$(4k^2+1)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4k^2+1},x_1x_2=\dfrac{4k^2-4}{4k^2+1}$ …………………5 分

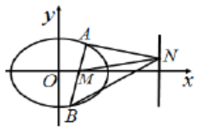
因为$OA\perp OB$，所以$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=0$，即$x_1x_2+y_1y_2=0$，即$(k^2+1)x_1x_2-k^2(x_1+x_2)+k^2=0$，

即$(k^2+1)\dfrac{4k^2-4}{4k^2+1}-k^2\dfrac{8k^2}{4k^2+1}+k^2=0$，解得$k=\pm2$ …………………7 分

（3）k_1,k_2,k_3成等差数列. 理由如下：设$N(4,n)$，

当直线l与 x 轴垂直时，易得$k_1+k_3=2k_2$； …………………8 分

当直线l与 x 轴不垂直时，



$k_1+k_3=\dfrac{y_1-n}{x_1-4}+\dfrac{y_2-n}{x_2-4}=\dfrac{k(x_1-1)-n}{x_1-4}+\dfrac{k(x_2-1)-n}{x_2-4}$

$=2k+(3k-n)(\dfrac{1}{x_1-4}+\dfrac{1}{x_2-4})=2k+(3k-n)\dfrac{x_1+x_2-8}{x_1x_2-4(x_1+x_2)+16}$ …………………10 分

$=2k+(3k-n)(-\dfrac{2}{3})=\dfrac{2n}{3}$

而$2k_2=\dfrac{2n}{3}$，所以$k_1+k_3=2k_2$，所以k_1,k_2,k_3成等差数列.

综上得：k_1,k_2,k_3成等差数列. …………………12 分