

2011年—2020年高考数学创新型试题研究

——以“新定义”型试题为例

541004 广西师范大学数学与统计学院 宋燕伶 彭刚
200241 华东师范大学数学系 程靖

摘要:笔者选取2011年—2020年各地高考理科数学试卷中的“新定义”型试题作为研究对象,分别对“新定义”型试题的类型、题型及内容进行统计分析,旨在了解高考数学试卷中“新定义”型试题的分布特征,并为“新定义”型试题的命制提供参考与建议.

关键词:高考数学;“新定义”型试题;分布特征;命题建议

1 问题提出

近十年来,数学高考试题不断进行改革,涌现出一批创新型试题.在这些试题中,有一类试题命题形式新颖、多样,涉及的内容也比较广泛,这就是“新定义”型试题.

所谓“新定义”型试题,是指题目涉及中学数学教材中未出现过的、学生未知的新概念、新运算、新公式、新定理等,需要学生利用题干中的信息,现学现用,进行阅读理解并解答题目^[1].“新定义”型试题旨在考查学生的阅读理解能力、应变能力和创新能力,因此成为教育工作者的关注对象.

目前对于高考数学“新定义”型试题的研究,可以追溯到2003年白志峰对新概念、新函数以及新运算三类定义型试题的举例赏析^[2],之后的研究多集

中于分类赏析、解法赏析和教学建议三个方面^{[3]-[6]}.但总体而言,对于“新定义”型试题的系统研究还较为缺乏.笔者对2011年—2020年高考理科数学试卷中的“新定义”型试题进行统计分析,探讨以下两方面的问题:(1)高考数学“新定义”型试题的分布有什么特征?(2)这些特征对于“新定义”型数学试题的命制有哪些启示?

2 研究设计

2.1 研究对象

笔者通过整理2011年—2020年全国各地140套高考理科数学试卷,得到了“新定义”型试题的来源情况(如表1所示).

这十年高考数学试卷中均出现“新定义”型试题,共计70道.

表1 2011年—2020年“新定义”型试题来源情况

年份	题数	省份及对应题目
2011	7	四川卷(16) 山东卷(12) 福建卷(15) 广东卷(8) 安徽卷(15) 上海卷(23) 天津卷(8)
2012	11	湖南卷(16) 湖北卷(7,13) 江西卷(21) 浙江卷(14) 福建卷(7,10,15,17) 上海卷(23) 广东卷(8)
2013	8	福建卷(10) 湖北卷(10) 湖南卷(20) 山东卷(16) 陕西卷(10) 四川卷(15) 上海卷(22) 重庆卷(22)
2014	7	上海卷(22) 江苏卷(20) 山东卷(15) 四川卷(15) 浙江卷(8) 湖北卷(6,14)
2015	7	福建卷(15) 北京卷(8) 山东卷(19) 浙江卷(6) 湖北卷(6,9,19)
2016	6	四川卷(15) 全国卷Ⅲ(12) 北京卷(20) 山东卷(10) 上海卷(23) 江苏卷(20)
2017	2	山东卷(15) 江苏卷(19)
2018	6	全国卷Ⅱ(8) 北京卷(4,20) 江苏卷(19) 上海卷(15,21)
2019	7	全国卷Ⅰ(6) 全国卷Ⅱ(4,16) 江苏卷(20) 北京卷(6,20) 上海卷(21)
2020	9	全国卷Ⅱ(12) 全国卷Ⅲ(4) 北京卷(21) 江苏卷(20) 新高考卷Ⅰ(6,12) 上海卷春季(21) 上海卷(19,21)

2.2 分析框架

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》将高中数学课程分为必修、选择性必修和选修三大模块,课程内容突出“函数”“几何与代数”“概率与统计”“数学建模活动与数学探究活动”四条主线^[7].此外,为了帮助学生更好地衔接初高中的数学学习,必修课程还添加了“预备知识”.由于高考数学“新定义”型试题几乎不涉及选修部分以及“数学建模与数学探究活动”,因而笔者不讨论上述内容.同时,鉴于目前对于“新定义”型试题并没有明确的分类标准,笔者依据被定义对象的特征将“新定义”型试题分为新概念、新性质、新公式、新运算四种类型(如表2所示),并从“预备知识+三条主线+四大类型”这一框架出发,统计分析“新定义”型试题类型和内容的分布.

2.3 计数说明

在对“新定义”型试题进行类型、题型及内容的数量统计时,参考如下计数方法.

(1)若一道“新定义”型试题中同时包含多种类型,则相应类型各计出现一次.例如2020年山东卷第6题同时出现新概念“基本再生指数”和新公式“ $I(t)=e^r$ ”,则记该题为新概念和新公式型试题;

(2)若一道题中包含几个小题,小题中出现相同的被定义对象则只记录一次;

(3)对于所考查题型的分类,每道“新定义”型试

题只归属于选择题、填空题及解答题三者之一,无交叉部分;

(4)在对内容模块进行统计时,主要依据题目中所考查的知识点,将各道试题划分到必修或选择性必修课程相应主线下.若题目同时涉及必修和选择性必修课程中的知识点,则各记录一次.例如2013年重庆卷22题既考查了必修课程预备知识中集合这一知识点,又考查了选择性必修课程中概率与统计主线下计数原理这一知识点,则各记录一次.

3 研究结果与分析

3.1 “新定义”型试题的类型分布

由图1、图2可以看出,近十年高考数学试卷中均考查了“新定义”型试题,其中包含新概念题37道、新性质题19道、新公式题10道以及新运算题8道.从每年的考查数量上看,除2017年外,近十年“新定义”型试题的考查题量逐年平稳增加,平均每年考查7道.2012年和2020年高考对“新定义”型试题的考查达到数量巅峰,共计12道,而2017年全国140份试卷中仅考查了2道.从考查类型上看,四种类型中新概念题的数量占比最大,达到一半以上,为51%,并且在2013年达到高峰,考查了7道.其次是新性质题,占比达到25%,而新公式题与新运算题的数量相差不大,分别为13%和11%.

表2 “新定义”型试题的类型说明

类型	特征说明	例题
新概念	题目中通常定义一个新的概念,旨在考查学生的阅读理解能力	(2012湖北卷-13) 回文数是指从左到右与从右到左读都一样的正整数.如22,121,3443,94249等.显然2位回文数有9个:11,22,33,...,99.3位回文数有90个:101,111,121,...,191,202,...,999.则: (I) 4位回文数有_____个; (II) $2n+1$ ($n \in \mathbf{N}^+$)位回文数有_____个
新性质	题目中通常会给出某种函数、数列、集合等具有的特殊性质,旨在考查学生的理解能力和综合应用能力	(2016山东卷-10) 若函数 $y=f(x)$ 的图形上存在两点,使得函数的图形在这两点处的切线互相垂直,则称 $y=f(x)$ 具有T性质.下列函数中具有T性质的是() A. $y=\sin x$ B. $y=\ln x$ C. $y=e^x$ D. $y=x^3$
新公式	题目中通常给出教材中从未出现过的数学公式,旨在考查学生的数学运算能力	(2020全国卷III-4) Logistic模型是常用数学模型之一,可应用于流行病学领域.有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$ (t 的单位:天)的Logistic模型: $I(t) = \frac{K}{1+e^{-0.25(t-53)}}$,其中 K 为最大确诊病例数.当 $I(t^*) = 0.95K$ 时,标志着已初步遏制疫情,则 t^* 约为() ($\ln 19 \approx 3$) A. 60 B. 63 C. 66 D. 69
新运算	题目中通常将一个特殊符号和已知运算结合起来表示一种新的运算,需要学生深刻理解所定义的运算法则和运算过程	(2015湖北卷-9) 已知集合 $A = \{(x, y) x^2 + y^2 \leq 1, x, y \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{(x, y) x \leq 2, y \leq 2, x, y \in \mathbf{Z}\}$, 定义集合 $A \oplus B = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$, 则 $A \oplus B$ 中元素的个数为() A. 77 B. 49 C. 45 D. 30

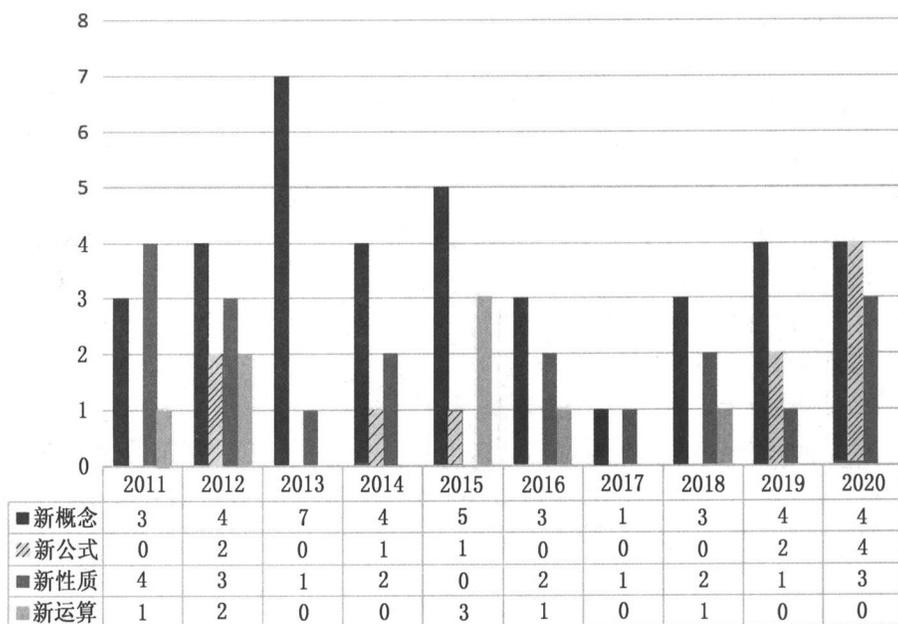
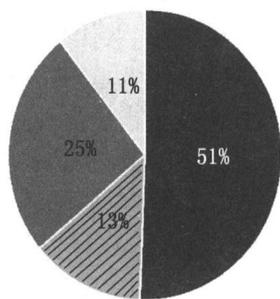


图1 2011年—2020年“新定义”型试题类型分布



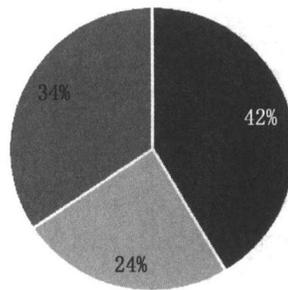
■ 新概念 ■ 新公式 ■ 新性质 ■ 新运算

图2 2011年—2020年“新定义”型试题各类型占比

3.2 “新定义”型试题的题型分布

由表3可知,四种类型的“新定义”型试题的题型分布具有差异性.其中,新概念和新定理的三种题型分布较为均匀,而新公式和新运算的题型分布较不均匀,两者均以选择题为主,但新公式型题从未以填空题的形式出现.

由图3不难发现,“新定义”型试题主要以客观题的形式命题,其中客观题多以选择题形式出现,占比达到42%.此外,为了考查学生的综合能力,“新定义”型试题也会以解答题的形式出现.



■ 选择题 ■ 填空题 ■ 解答题

图3 “新定义”型试题各题型占比

3.3 “新定义”型试题的内容分布

由图4可知,“新定义”型试题主要考查必修和选择性必修课程中的内容,并且考查内容范围广,涉及预备知识、函数、几何与代数、概率与统计四大主线.其中,对函数主线的考查最为突出,达到了45次,其次是几何与代数方面,考查了15次,而在预备知识以及概率与统计方面考查次数相差不多,分别为7次、9次.至于选修部分,近十年来仅出现了1道考查演绎推理的“新定义”型试题,故此不计入统计.

表3 2011年—2020年“新定义”型试题各题型数量及占比

	新概念		新定理		新公式		新运算	
	数量	比例	数量	比例	数量	比例	数量	比例
选择题	11	29.73%	7	36.84%	8	80.00%	4	50.00%
填空题	12	32.43%	4	21.05%	0	0%	2	25.00%
解答题	14	37.84%	8	42.11%	2	20.00%	2	25.00%

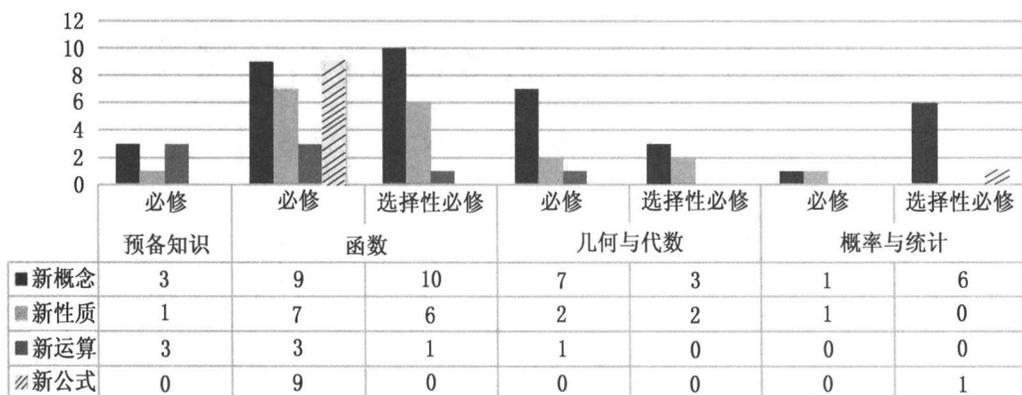


图4 2011年—2020年“新定义”型试题内容分布情况

函数是贯穿高中数学课程的主线,故无论是对必修课程还是选择性必修课程的考查都会以函数为主线为命题重点.由于函数是数学中最基本的概念之一,不同的函数具有不同的性质,因此在对必修课程中函数这一主线进行考查时,“新定义”型试题常以给出某种特殊函数、定义某种函数性质或给出某种函数解析式的形式命题.而对于选择性必修课程中函数这一主线,则着重考查特殊数列的概念和性质.

在预备知识这一模块,“新定义”型试题主要通过定义一个新的集合或者定义与集合相关的新运算,以此考查集合元素个数的计算、集合的基本关系以及集合的基本运算.

在几何与代数这一模块,代数方面仅考查了向量的基本运算,而关于立体几何知识的考查最具特色.许多“新定义”型试题通过结合数学史中的几何名词,考查学生对几何体的特征和性质的理解.例如,《九章算术》中的“阳马”在历年高考中出现了两次.

最后,在概率与统计部分,主要考查了概率的计算、排列组合、计数原理以及随机变量的分布列等.

3.4 总体分布特征

根据以上统计结果,可以概括出高考中“新定义”型试题在类型、题型及考查内容三方面的分布特征.

第一,从类型上看,“新定义”型试题主要以新概念和新性质题为主,侧重引入一个新的概念或性质,考查学生的阅读理解能力和现学现用能力.

第二,从题型上看,“新定义”型试题主要以客观题的形式出现,并且四种“新定义”型试题的题型分布具有差异性.新概念和新性质题对三种题型的考查较为均匀,而新公式和新运算题多以选择题的形式出现.

第三,从内容上看,“新定义”型试题的考查内容涉及范围较广,主要考查必修和选择性必修课程中的内容,并且必修课程主要考查函数以及几何与代数主线中的知识点,选择性必修课程则侧重考查函数以及概率与统计部分的内容.

4 思考与建议

2020年,教育部宣布现有高考体系的考试大纲不再修订,而2019年高考理科数学考试大纲提出,数学学科的命题在考查基础知识的基础上,注重对数学思想方法的考查,注重对数学能力的考查,展现数学的科学价值和人文价值^[8].由此,笔者提出以下关于“新定义”型试题命题的改进建议.

4.1 调整试题类型,加强能力考查

近十年间的“新定义”型试题主要以新概念和新性质为主,并且大都是对基础知识的考查,主要考查学生的阅读理解能力,而新公式和新运算的题量相对较少,且多以选择题的形式出现.因此,命题者在命制“新定义”型试题时,可以适当调整四类题型的数量,在解答题部分适当增加新公式和新运算型试题,加强对学生数据处理能力的考查.

值得欣慰的是,命题者也注意到了这一方面,开始在解答题部分命制考查立体几何知识的“新定义”型试题.例如2015年湖北卷的19题,首先介绍《九章算术》中“阳马”“鳖臑”的几何含义,再给出线面垂直等条件,要求学生判断该四面体是否为鳖臑,综合考查了学生的阅读理解能力、空间想象能力及逻辑推理能力.

4.2 增添选修内容,拓宽知识范围

目前的“新定义”型试题主要考查必修和选择性必修课程中的内容,几乎没有涉及选修课程.而选修课程作为必修课程与选择性必修课程的补充,为学生确定发展方向提供引导,为大学自主招生提供参考.因此高考理科数学试卷中可以适当考查选修A类课程中的衔接内容.例如,在函数部分可以通过给出连续函数的定义,让学生判断所给函数是否为连续函数;在导数部分可以考查利用二阶导数判断凹凸函数等.

(下转第40页)

本质出发,可以将许多形式各异的问题统一到同一模型结构中来.笔者通过将排列组合与递推思想结合,更深入地理解并解决形式各异的染色问题、传球问题,这样的探究有利于培养学生建立和运用数学模型的意识与能力.上述案例的结论,是笔者在教学计数原理章节时,学生通过自己的归纳、讨论、思辨总结出来的.

重视培养学生数学建模的能力已成为数学课堂关注的重点议题,通过本节课的探索分析,学生的数学运算能力、逻辑思维能力、数学分析能力都得到了充分的锻炼,应用数学的意识也得到了进一步增强.在这样的实践过程中,学生对创新精神有了真切的体会,对自己的研究成果有了更深刻的认识,探索实践促进他们对数学学习的热情和信心,并更好地提

升他们的创造思维.

参考文献

- [1] 陈新玉. 项链染色问题探讨[J]. 新疆教育学院学报, 2012(9).
- [2] 杨光伟. 对排列组合教学的一点建议[J]. 数学通讯, 2004(8).
- [3] 周天明. 对《两种不同着色应用问题的探析》一文的更正[J]. 中学数学教学, 2015(1).
- [4] 陆利标. 运用函数思想解决环形染色问题[J]. 数学通讯, 2007(4).
- [5] 李中华. 指导高中生数学建模“四部曲”[J]. 数学教学通讯, 2019(12).
- [6] 梁振强. 高中生核心素养之“数学建模”能力的培养与思考[J]. 中学数学研究, 2009(2).

(上接第19页)

4.3 优化内容设计,增添人文素养

“新定义”型试题作为创新题型的一种,最突出的是形式上的新颖,命题者常常在同一定义的不同形式上下功夫,而在内容设计方面常常缺少设置相应的数学情境或生活情境.试题命制的目的,并不仅仅在于考查学生的数学知识,更重要的是让学生了解数学的应用价值和人文价值,感悟数学来源于生活并服务于生活的理念.因此,在命制“新定义”型试题时,不仅要考虑形式上的创新,而且要注重与实际生活或者数学史料相结合,增添人文素养.例如,2018年某地高三考试中曾出现如下模拟题.

欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (i 为虚数单位)是由瑞士著名数学家欧拉发现的,它将指数函数的定义域扩大到了复数,建立了三角函数和指数函数之间的关系,它在复变函数论里非常重要,被誉为“数学中的天桥”.根据此公式可知, e^{2i} 表示的复数在复平面内对应的点位于()

- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

上述试题首先介绍了欧拉公式的数学价值,然

后再通过欧拉公式考查复数的坐标表示,丰富了试题的人文素养.具有人文素养的数学试题将对数学教学起到良好的引导作用.

参考文献

- [1] 魏巍. 2015年高考数学中的新定义型试题例析[J]. 中学数学杂志, 2015(9): 60-61.
- [2] 白志峰. 高考新题型:定义型试题[J]. 中学生数理化(高中版), 2003(2): 21;23.
- [3] 王赛英, 徐敏贤. 四边形中“新定义”型试题探究[J]. 数学通报, 2008(9): 43-46.
- [4] 张安军. 台州市十年数学中考“新定义”试题赏析与命制[J]. 数学教学, 2016(7): 37-43.
- [5] 杨一丽. 学业考试中新定义试题的命制分析与反思[J]. 数学教学, 2017(6): 25-27;35.
- [6] 黄杏, 胡典顺. 近年来高考数学中“新定义”题型解析[J]. 数学通讯, 2018(23): 35-38.
- [7] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准:2017年版 2020年修订[S]. 北京:人民教育出版社, 2020.
- [8] 教育部考试中心. 2019年普通高等学校招生全国统一考试大纲:理科[M]. 北京:高等教育出版社, 2018.

欢迎订阅《上海中学数学》