加试 3 答案

1. 用数学归纳法证明：

$$1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots+n\times(n+1)\times(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}(n\in\mathbf{N}^*).$$

证明：（1）当 $n=1$ 时，左边 $=1\times2\times3=6$，右边 $=\frac{1\times2\times3\times4}{4}=6=$ 左边，∴等式成立．

（2）设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，等式成立，

即 $1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots+k\times(k+1)\times(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$．

则当 $n=k+1$ 时，左边 $=1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots+k\times(k+1)\times(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3)$$
$$=(k+1)(k+2)(k+3)(\frac{k}{4}+1)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$
$$=\frac{(k+1)(k+1+1)(k+1+2)(k+1+3)}{4}.$$

∴ $n=k+1$ 时，等式成立．………8 分　　由（1）、（2）可知，原等式对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立．

2. (1) 的展开式中，若第 3 项与第 6 项系数相等，且 n 等于多少？

(2) $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式奇数项的二项式系数之和为 128，则求展开式中二项式系数最大的项．

解：(1) 由已知得 $C_n^2=C_n^5\Rightarrow n=7$

(2) 由已知得 $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=128$，n=8

而展开式中二项式系数最大项是 $T_5=C_8^4(x\sqrt{x})^4\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^4=70x^4\sqrt[3]{x^2}$．

3．一个袋中装有大小和质地都相同的 10 个球，其中黑球 4 个，白球 5 个，红球 1 个。

（1）从袋中任意摸出 3 个球，记得到白球的个数为 X，求随机变量 X 的概率分布和数学期望 E(X)；

（2）每次从袋中随机地摸出一球，记下颜色后放回，求 3 次摸球后，摸到黑球的次数大于摸到白球的次数的概率.

解:(1)随机变量X的取值为0,1,2,3,分布列是

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

………………………………………………………………………………………… 3分

X的数学期望$E(X)=\frac{1}{12}\times 0+\frac{5}{12}\times 1+\frac{5}{12}\times 2+\frac{1}{12}\times 3=\frac{3}{2}$. ……………………………… 5分

(2)记3次摸球中,摸到黑球次数大于摸到白球次数为事件A,

则$P(A)=C_3^3(\frac{4}{10})^3+C_3^2[(\frac{4}{10})^2\cdot\frac{5}{10}+(\frac{4}{10})^2\cdot\frac{1}{10}]+C_3^1(\frac{4}{10})^1\cdot(\frac{1}{10})^2=\frac{91}{250}$.

答:摸到黑球的次数大于摸到白球的次数的概率为$\frac{91}{250}$. ……………………………… 10分

4．已知$f(x)=(2+\sqrt{x})^n$，其中$n\in N^*$.

(1)若展开式中含x^3项的系数为14, 求n的值；

(2)当$x=3$时, 求证：$f(x)$必可表示成$\sqrt{s}+\sqrt{s-1}(s\in N^*)$的形式.

23.解: (1)因为$T_{r+1}=C_8^r 2^{8-r} x^{\frac{r}{2}}$,所以$r=6$,故$x^3$项的系数为$C_n^6\cdot 2^{n-6}=14$,解得$n=7$ …5分

(2) 由 二 项 式 定 理 可知,$(2+\sqrt{3})^n=C_n^0 2^n\left(\sqrt{3}\right)^0+C_n^1 2^{n-1}\left(\sqrt{3}\right)^1+C_n^2 2^{n-2}\left(\sqrt{3}\right)^2+\cdots+C_n^n 2^0\left(\sqrt{3}\right)^n$,

设$(2+\sqrt{3})^n=x+\sqrt{3}y=\sqrt{x^2}+\sqrt{3y^2}$，而若有$(2+\sqrt{3})^n=\sqrt{a}+\sqrt{b}$，$a,b\in N^*$，

则$(2-\sqrt{3})^n=\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $a,b\in N^*$ ……………………7分

∵ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(2+\sqrt{3})^n\cdot(2-\sqrt{3})^n=1$，

∴令$a=s,s\in N^*$，则必有$b=s-1$ ……………………………9分

∴ $(2+\sqrt{3})^n$必可表示成$\sqrt{s}+\sqrt{s-1}$的形式，其中$s\in N^*$ ………………10分

注：用数学归纳法证明的，证明正确的也给相应的分数.