2021届高三第二次调研测试

数学参考答案及讲评建议

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合M，N，P均为$\mathbf{R}$的非空真子集，且$M\cup N=\mathbf{R}$，$M\cap N=P$，则$M\cap(\complement_{\mathbf{R}}P)=$

A. M　　B. N　　C. $\complement_{\mathbf{R}}M$　　D. $\complement_{\mathbf{R}}N$

【答案】D

2. 已知$x\in\mathbf{R}$，则“$-3\leqslant x\leqslant 4$”是“$\lg(x^2-x-2)\leqslant 1$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

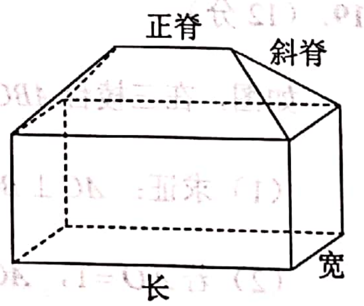
【答案】B

3. 欧拉恒等式：$e^{i\pi}+1=0$被数学家们惊叹为“上帝创造的等式”．该等式将数学中几个重要的数：自然对数的底数e、圆周率π、虚数单位i、自然数1和0完美地结合在一起，它是由欧拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta(\theta\in\mathbf{R})$令$\theta=\pi$得到的.根据欧拉公式，$e^{2i}$在复平面内对应的点在

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】B

4. “帷幄”是古代打仗必备的帐篷，又称“幄帐”．右图是一种幄帐示意图，帐顶采用“五脊四坡式”，四条斜脊的长度相等，一条正脊平行于底面．若各斜坡面与底面所成二面角的正切值均为$\frac{1}{2}$，底面矩形的长与宽之比为5:3，则正脊与斜脊长度的比值为



A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{8}{9}$　　C. $\frac{9}{10}$　　D. 1

【答案】B

5. 已知$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$均为单位向量，且$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{c}$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=$

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

6. 函数$f(x)=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x$的图象的一条对称轴为

A. $x=\frac{\pi}{12}$　　B. $x=\frac{\pi}{6}$　　C. $x=\frac{\pi}{3}$　　D. $x=\frac{\pi}{2}$

【答案】A

7. 某班45名学生参加“3·12”植树节活动，每位学生都参加除草、植树两项劳动. 依据劳动表现，评定为“优秀”、“合格”2个等级，结果如下表：

等级＼项目	优秀	合格	合计
除草	30	15	45
植树	20	25	45

若在两个项目中都“合格”的学生最多有10人，则在两个项目中都“优秀”的人数最多为

A. 5　　B. 10　　C. 15　　D. 20

【答案】C

8. 若$a\ln a>b\ln b>c\ln c=1$，则

A. $e^{b+c}\ln a>e^{c+a}\ln b>e^{a+b}\ln c$　　B. $e^{c+a}\ln b>e^{b+c}\ln a>e^{a+b}\ln c$

C. $e^{a+b}\ln c>e^{c+a}\ln b>e^{b+c}\ln a$　　D. $e^{a+b}\ln c>e^{b+c}\ln a>e^{c+a}\ln b$

【答案】C

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

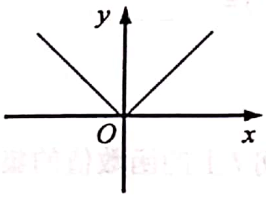
9. 已知数列$\{a_n\}$是等比数列，下列结论正确的为

A. 若$a_1a_2>0$，则$a_2a_3>0$　　B. 若$a_1+a_3<0$，则$a_1+a_2<0$

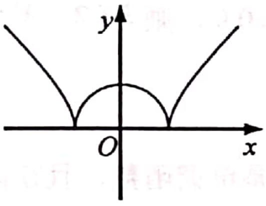
C. 若$a_2>a_1>0$，则$a_1+a_3>2a_2$　　D. 若$a_1a_2<0$，则$(a_2-a_1)(a_2-a_3)<0$

【答案】AC

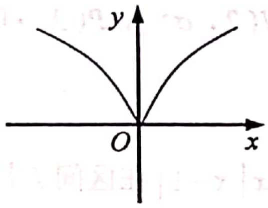
10．已知函数 $f(x)=\sqrt{|x^2-a|}$（$a\in\mathbf{R}$），则 $y=f(x)$ 的大致图象可能为



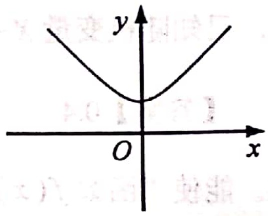
A.



B.



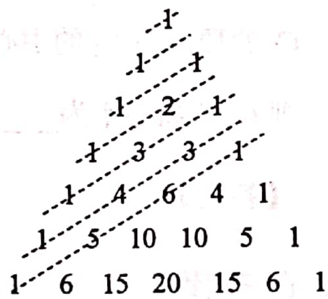
C.



D.

【答案】ABD

11．“杨辉三角”是中国古代数学杰出的研究成果之一．如图所示，由杨辉三角的左腰上的各数出发，引一组平行线，从上往下每条线上各数之和依次为：1，1，2，3，5，8，13，…，则



A．在第 9 条斜线上，各数之和为 55

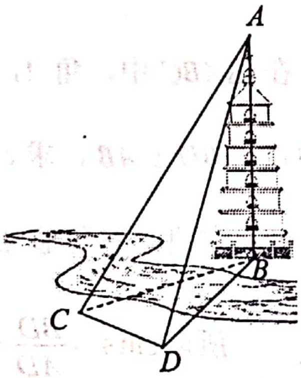
B．在第 n（$n\geqslant 5$）条斜线上，各数自左往右先增大后减小

C．在第 n 条斜线上，共有 $\dfrac{2n+1-(-1)^n}{4}$ 个数

D．在第 11 条斜线上，最大的数是 C_7^3

【答案】BCD

12．如图，某校测绘兴趣小组为测量河对岸直塔 AB（A 为塔顶，B 为塔底）的高度，选取与 B 在同一水平面内的两点 C 与 D（B，C，D 不在同一直线上），测得 $CD=s$．测绘兴趣小组利用测角仪可测得的角有：$\angle ACB$，$\angle ACD$，$\angle BCD$，$\angle ADB$，$\angle ADC$，$\angle BDC$，则根据下列各组中的测量数据可计算出塔 AB 的高度的是



A．s，$\angle ACB$，$\angle BCD$，$\angle BDC$

B．s，$\angle ACB$，$\angle BCD$，$\angle ACD$

C．s，$\angle ACB$，$\angle ACD$，$\angle ADC$

D．s，$\angle ACB$，$\angle BCD$，$\angle ADC$

【答案】ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$，$P(X>0)=0.9$，则 $P(2<X\leqslant 4)=$________.

【答案】0.4

14. 能使“函数 $f(x)=x|x-1|$ 在区间 I 上不是单调函数，且在区间 I 上的函数值的集合为 $[0,2]$.”是真命题的一个区间 I 为________.

【答案】答案不唯一，只要形如 $[a,2]$ 或 $(a,2]$，其中 $0\leqslant a<1$ 的均正确.

15. 已知椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 P，右焦点 F 与抛物线 C_2 的焦点重合，C_2 的顶点与 C_1 的中心 O 重合．若 C_1 与 C_2 相交于点 A，B，且四边形 $OAPB$ 为菱形，则 C_1 的离心率为________.

【答案】$\dfrac{1}{3}$

16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$AC=8$，点 P 到底面 ABC 的距离为 7．若点 P，A，B，C 均在一个半径为 5 的球面上，则 $PA^2+PB^2+PC^2$ 的最小值为________.

【答案】198

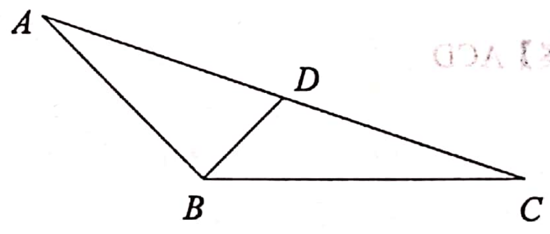
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

在△ABC 中，角 A，B，C 所对边分别为 a，b，c，$b=\sqrt{5}c$，$c\sin A=1$．点 D 是 AC 的中点，$BD\perp AB$，求 c 和 $\angle ABC$.

解：在直角三角形 ABD 中，$BD^2=AD^2-AB^2=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-c^2=\dfrac{c^2}{4}$，所以 $BD=\dfrac{c}{2}$.

所以 $\sin A=\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ……2 分



又因为 $c\sin A=1$，所以 $c=\sqrt{5}$. ……4 分

由 $b=\sqrt{5}c$ 得，$b=5$.

因为 $\sin A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. ……5 分

在$\triangle ABC$中，由余弦定理，得$a=\sqrt{5^2+\left(\sqrt{5}\right)^2-2\times5\times\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\sqrt{10}$．……7 分

由正弦定理，得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin\angle ABC}$，即$\frac{5}{\sin\angle ABC}=\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}$，

所以$\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{2}}{2}$． ……9 分

又因为$\angle ABC\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以$\angle ABC=\frac{3\pi}{4}$． ……10 分

18．（12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_{n+1}=4a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，且$a_1=4$．

（1）证明：$\{a_{n+1}-2a_n\}$是等比数列，并求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）在①$b_n=a_{n+1}-a_n$；②$b_n=\log_2\frac{a_n}{n}$；③$b_n=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}a_n}$这三个条件中任选一个补充在下面横线上，并加以解答．已知数列$\{b_n\}$满足____________，求$\{b_n\}$的前n项和T_n．

注：如果选择多个方案分别解答，按第一个方案解答计分．

解：（1）当$n\geqslant2$时，因为$S_{n+1}=4a_n$，所以$S_n=4a_{n-1}$，两式相减得，$a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1}$．

所以$a_{n+1}-2a_n=2\left(a_n-2a_{n-1}\right)$． ……2 分

当$n=1$时，因为$S_{n+1}=4a_n$，所以$S_2=4a_1$，又$a_1=4$，故$a_2=12$，于是$a_2-2a_1=4$，

所以$\{a_{n+1}-2a_n\}$是以 4 为首项 2 为公比的等比数列． ……3 分

所以$a_{n+1}-2a_n=2^{n+1}$，两边除以2^{n+1}得，$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=1$． ……4 分

又$\frac{a_1}{2}=2$，所以$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$是以 2 为首项 1 为公差的等差数列．

所以$\frac{a_n}{2^n}=n+1$，即$a_n=(n+1)\cdot2^n$． ……6 分

（2）若选①：$b_n=a_{n+1}-a_n$，即$b_n=(n+2)\cdot2^{n+1}-(n+1)\cdot2^n=(n+3)\cdot2^n$． ……8 分

因为$T_n=4\times2^1+5\times2^2+6\times2^3+\cdots+(n+3)\times2^n$，

所以 $2T_n=4\times2^2+5\times2^3+6\times2^4+\cdots+(n+3)\times2^{n+1}$.

两式相减得，$-T_n=4\times2^1+\left(2^2+2^3+\cdots+2^n\right)-(n+3)\times2^{n+1}$ ……10 分

$$=8+\frac{4\times\left(2^{n-1}-1\right)}{2-1}-(n+3)\times2^{n+1}$$

$$=-(n+2)\times2^{n+1}+4,$$

所以 $T_n=(n+2)\times2^{n+1}-4$. ……12 分

若选②：$b_n=\log_2\frac{a_n}{n}$，即 $b_n=\log_2\frac{n+1}{n}+\log_2 2^n=\log_2\frac{n+1}{n}+n$. ……8 分

所以 $T_n=\left(\log_2\frac{2}{1}+\log_2\frac{3}{2}+\cdots+\log_2\frac{n+1}{n}\right)+(1+2+\cdots+n)$

$$=\log_2\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)+\frac{(1+n)n}{2}$$

$$=\log_2(n+1)+\frac{(1+n)n}{2}.$$ ……12 分

若选③：$b_n=\frac{a_{n+2}}{a_na_{n+1}}$，即 $b_n=\frac{4a_{n+1}-4a_n}{a_{n+1}a_n}=4\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$. ……8 分

所以 $T_n=4\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+4\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+4\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$$=4\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$ ……10 分

$$=4\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+2)2^{n+1}}\right]=1-\frac{1}{(n+2)2^{n-1}}.$$ ……12 分

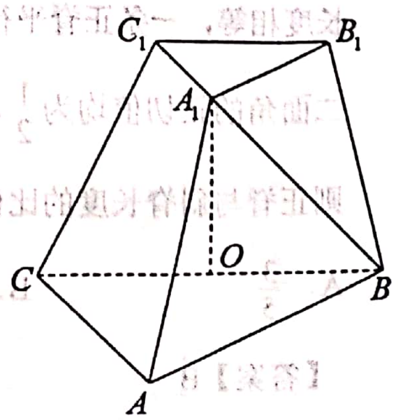
19.（12 分）

如图，在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp A_1B$，O 是 BC 的中点，$A_1O\perp$ 平面 ABC.

（1）求证：$AC\perp BC$；

（2）若 $A_1O=1$，$AC=2\sqrt{3}$，$BC=A_1B_1=2$，

求二面角 B_1-BC-A 的大小.



解：（1）因为 $A_1O\perp$ 平面 ABC，$AC\subset$ 平面 ABC，

所以 $A_1O\perp AC$．……1 分

又因为 $AC\perp A_1B$，$A_1B\cap A_1O=A_1$，$A_1B\subset$平面 A_1BO，$A_1O\subset$平面 A_1BO，

所以 $AC\perp$平面 A_1BO．……3 分

又因为 $BC\subset$平面 A_1BO，所以 $AC\perp BC$．……4 分

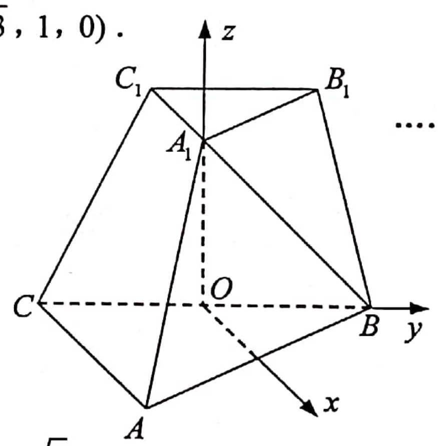
（2）以 O 为坐标原点，与 CA 平行的直线为 x 轴，OB 所在直线为 y 轴，OA_1 所在直线为 z 轴，建立如所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，

则 $O(0，0，0)$，$A(2\sqrt{3}，-1，0)$，$B(0，1，0)$，$A_1(0，0，1)$．

所以 $\overrightarrow{OB}=(0，1，0)$，$\overrightarrow{AB}=(-2\sqrt{3}，2，0)$，$\overrightarrow{OA_1}=(0，0，1)$，于是 $AB=4$．

由 $ABC-A_1B_1C_1$ 是三棱台，所以 $AB\,//\,A_1B_1$．

又因为 $A_1B_1=2$，所以 $\overrightarrow{A_1B_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3}，1，0)$．



所以 $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=(-\sqrt{3}，1，1)$．……7 分

设平面 BB_1C_1C 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x，y，z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OB}=0，\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OB_1}=0，\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y=0，\\ -\sqrt{3}x+y+z=0，\end{cases}$

取 $x=1$，则 $y=0$，$z=\sqrt{3}$，即 $\boldsymbol{n}=(1，0，\sqrt{3})$．……9 分

因为 $OA_1\perp$平面 ABC，所以平面 ABC 的法向量为 $\overrightarrow{OA_1}=(0，0，1)$．……10 分

所以 $\cos<\boldsymbol{n}，\overrightarrow{OA_1}>=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OA_1}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{OA_1}|}=\dfrac{1\times0+0\times0+\sqrt{3}\times1}{\sqrt{1^2+0^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\times\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

因为二面角 B_1-BC-A 为钝二面角，

所以二面角 B_1-BC-A 的大小是 $\frac{5\pi}{6}$．……12 分

20.（12 分）

甲、乙两队进行排球比赛，每场比赛采用“5 局 3 胜制”（即有一支球队先胜 3 局即获胜，比赛结束）．比赛排名采用积分制，积分规则如下：比赛中，以 3:0 或 3:1 取胜的球队积 3 分，负队积 0 分；以 3:2 取胜的球队积 2 分，负队积 1 分．已知甲、乙两队比赛，甲每局获胜的概率为$\frac{2}{3}$．

（1）甲、乙两队比赛 1 场后，求甲队的积分 X 的概率分布列和数学期望；

（2）甲、乙两队比赛 2 场后，求两队积分相等的概率．

解：（1）依题意，X 的所有可能取值为 0，1，2，3，且

$$P(X=0)=\left(\frac{1}{3}\right)^3+C_3^1\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9},$$

$$P(X=1)=C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{8}{81},$$

$$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81},$$

$$P(X=3)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{16}{27},$$ ……4 分

所以 X 的概率分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{27}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{8}{81}+2\times\frac{16}{81}+3\times\frac{16}{27}=\frac{184}{81}$． ……6 分

（2）记“甲、乙比赛两场后，两队积分相等”为事件 A．

设第 i 场甲、乙两队积分分别为 X_i，Y_i，则 $Y_i=3-X_i$，$i=1$，2．

因为两队积分相等，所以 $X_1+X_2=Y_1+Y_2$，

即 $X_1+X_2=(3-X_1)+(3-X_2)$，所以 $X_1+X_2=3$． ……8 分

所以 $P(A)=P(X_1=0)P(X_2=3)+P(X_1=1)P(X_2=2)$

$+P(X_1=2)P(X_2=1)+P(X_1=3)P(X_2=0)$ ……10 分

$=\frac{1}{9}\times\frac{16}{27}+\frac{8}{81}\times\frac{16}{81}+\frac{16}{81}\times\frac{8}{81}+\frac{16}{27}\times\frac{1}{9}$

$=\frac{1120}{6561}$

答：甲、乙比赛两场后，两队积分相等的概率为$\frac{1120}{6561}$.　　　　……12 分

21．（12 分）

已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 $P(3,1)$ 在 C 上，且 $|PF_1|\cdot|PF_2|=10$.

（1）求 C 的方程；

（2）斜率为 -3 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，点 B 关于原点的对称点为 D. 若直线 PA，PD 的斜率存在且分别为 k_1，k_2，证明：$k_1\cdot k_2$ 为定值.

解：（1）设 $F_1(-c,\ 0)$，$F_2(c,\ 0)\,(c>0)$，其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

因为 $|PF_1||PF_2|=10$，所以 $\sqrt{(3+c)^2+1}\times\sqrt{(3-c)^2+1}=10$，

解得 $c^2=16$ 或 $c=0$，又 $c>0$，故 $c=4$.　　　　……2 分

所以 $2a=\sqrt{(3+4)^2+1}-\sqrt{(3-4)^2+1}=4\sqrt{2}$，即 $a=2\sqrt{2}$.　　　　……4 分

所以 $b^2=c^2-a^2=8$.

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$.　　　　……5 分

（2）设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则 $D(-x_2,\ -y_2)$.

设直线 l 方程为 $y=-3x+m$，与双曲线 C 方程联立，

消去 y 得，$8x^2-6mx+m^2+8=0$.

由 $\Delta=(-6m)^2-32(m^2+8)>0$，得 $|m|>8$.

$x_1+x_2=\frac{3m}{4}$，$x_1x_2=\frac{m^2+8}{8}$.　　　　……7 分

所以 $y_1y_2=\left(-3x_1+m\right)\left(-3x_2+m\right)=9x_1x_2-3m\left(x_1+x_2\right)+m^2=-\frac{m^2}{8}+9$． ……8 分

所以 $k_1\cdot k_2=\frac{y_1-1}{x_1-3}\cdot\frac{-y_2-1}{-x_2-3}=\frac{y_1y_2+y_1-y_2-1}{x_1x_2+3x_1-3x_2-9}$ ……10 分

$$=\frac{-\frac{m^2}{8}+8-3\left(x_1-x_2\right)}{\frac{m^2}{8}-8+3\left(x_1-x_2\right)}=-1.$$

所以 $k_1\cdot k_2$ 为定值． ……12 分

22．（12 分）

已知函数 $f(x)=e^{ax}(\ln x+1)(a\in\mathbf{R})$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数．

（1）设函数 $g(x)=\frac{f'(x)}{e^{ax}}$，求 $g(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，

① 求实数 a 的取值范围；

② 证明：当 $a<2e^{\frac{3}{2}}$ 时，$\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_2)}{x_2}$．

解：（1）依题意，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $g(x)=\frac{f'(x)}{e^{ax}}=a\ln x+a+\frac{1}{x}$，

则 $g'(x)=\frac{ax-1}{x^2}$．

① 当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)<0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，$g(x)$ 单调递减；……2 分

② 当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$ 得，$x=\frac{1}{a}$，

所以，当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减；

当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增．

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$g(x)$ 的减区间为 $(0,+\infty)$，无增区间；

当 $a>0$ 时，$g(x)$ 的减区间为 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$，增区间为 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$． ……4 分

（2）①因为 $f(x)$ 有两个极值点，所以 $g(x)$ 有两个零点. 由（1）知，$a\leqslant 0$ 时不合；

当 $a>0$ 时，$g(x)_{极小值}=g\left(\frac{1}{a}\right)=a(2-\ln a)$.

（i）当 $0<a<e^2$ 时，$g(x)>g\left(\frac{1}{a}\right)>0$，$g(x)$ 没有零点，不合；

（ii）当 $a=e^2$ 时，$g\left(\frac{1}{a}\right)=0$，$g(x)$ 有一个零点 $\frac{1}{a}$，不合；

（iii）当 $a>e^2$ 时，$g\left(\frac{1}{a}\right)<0$. ……6 分

$g\left(\frac{1}{a^2}\right)=a(a+1-2\ln a)$，

设 $\varphi(a)=a+1-2\ln a$，$a>e^2$，则 $\varphi'(a)=1-\frac{2}{a}>0$.

所以 $\varphi(a)>\varphi(e^2)=e^2-3>0$，即 $g\left(\frac{1}{a^2}\right)>0$.

所以存在 $x_1\in\left(\frac{1}{a^2},\frac{1}{a}\right)$，使得 $g(x_1)=0$.

又因为 $g\left(\frac{1}{e}\right)=e>0$，所以存在 $x_2\in\left(\frac{1}{a},\frac{1}{e}\right)$，使得 $g(x_2)=0$.

$f(x)$ 的值变化情况如下表：

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以当 $a>e^2$ 时，$f(x)$ 有两个极值点.

综上，a 的取值范围是 $(e^2,+\infty)$. ……8 分

②因为 $a<2e^{\frac{3}{2}}$，$g\left(\frac{2}{a}\right)=a\left(\frac{3}{2}+\ln\frac{2}{a}\right)>0$，

所以 $\frac{1}{a^2}<x_1<\frac{1}{a}<x_2<\frac{2}{a}$. ……9 分

因为 x_1，x_2 是 $g(x)=a\ln x+a+\frac{1}{x}$ 的两个零点，

所以 $\ln x_1+1=-\frac{1}{ax_1}$，$\ln x_2+1=-\frac{1}{ax_2}$.

所以$\dfrac{f(x_1)}{x_1}=\dfrac{e^{ax_1}(\ln x_1+1)}{x_1}=-\dfrac{e^{ax_1}}{ax_1^2}$，$\dfrac{f(x_2)}{x_2}=\dfrac{e^{ax_2}(\ln x_2+1)}{x_2}=-\dfrac{e^{ax_2}}{ax_2^2}$．

记$h(x)=-\dfrac{e^{ax}}{ax^2}$（$\dfrac{1}{a^2}<x<\dfrac{2}{a}$），则$h'(x)=-\dfrac{e^{ax}\left(x-\dfrac{2}{a}\right)}{x^3}>0$，

所以$h(x)$在$\left(\dfrac{1}{a^2},\dfrac{2}{a}\right)$上单调递增．

又因为$\dfrac{1}{a^2}<x_1<\dfrac{1}{a}<x_2<\dfrac{2}{a}$，所以$h(x_1)<h(x_2)$，即$\dfrac{f(x_1)}{x_1}<\dfrac{f(x_2)}{x_2}$．

……12分