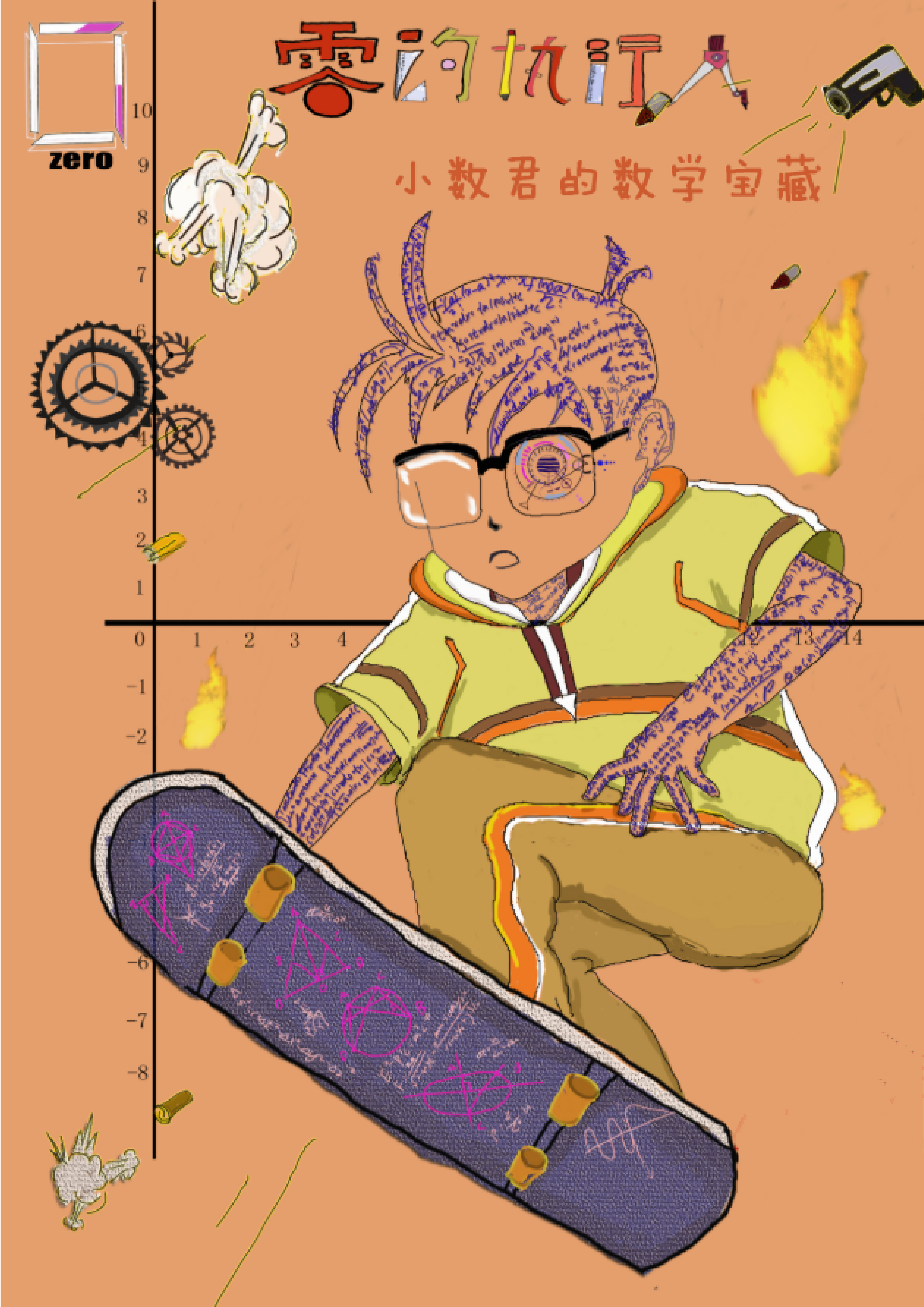
零的执行人
小数君的数学宝藏
zero

这是一个浩大舰队远征灿烂宇宙，无比波澜壮阔的时代，

我们每一个人都是这个时代的战士，我们都怀揣着一个名为数学、数学竞赛的梦，无数英勇的战士前仆后继，坚强的生存与光荣的牺牲交相辉映，

这是一场或许我们用一生都追逐不到尽头的梦，

但是我们无所畏惧，我们引吭高歌，我们竭尽全力，

我们所走过的梦，是用一个个音符所点缀出来的战歌，我们每一个都是唱着歌的追梦人啊！

这个梦带给我们追逐的力量，带给我们迎难而上的拼劲，还有一个绚丽夺目的数学世界，前方的路虽然很黑，但是请看看在你周围这些带着光芒的人，他们和你一样，和我一样，都是在这条路上行走的伙伴，

他们和你一样，和我一样，都是这个时代爱数学、爱数学竞赛的傻子们，

嘿，傻子，这个时代欢迎你的到来，

嘿，傻子，加入这个“傻子俱乐部”吧，接下来，让我们一起走吧

—来自傻子俱乐部，最爱你们的小数君

2019 年北京大学数学金秋营试题解析

题 1. 求最大的正实数 α，对于满足 $a+b+c \mid a^2+b^2+c^2$ 的不全相等的正整数 a,b,c，都有方程

$$(x+b)^2=(x+c)(x+a)$$

在区间 $(0,\alpha)$ 内没有解.

解： 所求 α 的最大值是 $\dfrac{1}{2}$.

方程 $(x+b)^2=(x+c)(x+a)$ 的解是 $x=\dfrac{b^2-ca}{c+a-2b}$，由 $a+b+c \mid a^2+b^2+c^2$ 知 $a+b+c \mid 2(ab+bc+ca)$.
注意到 $ab+bc+ca=ca+b(c+a)\equiv ca-b^2 \pmod{(a+b+c)}$，所以 $a+b+c \mid 2(b^2-ca)$.
若 $b^2<ca$，则 $b^2<ca<\left(\dfrac{c+a}{2}\right)^2$，于是 $x=\dfrac{b^2-ca}{c+a-2b}<0$，矛盾.
所以 $b^2>ca$，进而 $c+a>2b$，所以 $2(b^2-ca)\geq a+b+c$，所以

$$x=\frac{b^2-ca}{c+a-2b}\geq\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b+c}{c+a-2b}>\frac{1}{2}.$$

我们取 $a=1,\ c=\dfrac{2b^2-b-1}{3}$，其中 $b\equiv 1 \pmod 3$，此时

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{b^2-ca}{c+a-2b}=\frac{1}{2},$$

根据极限保号性知：$\dfrac{1}{2}$ 是最好的常数. **（解题人：吴宇培）**

题 2. 圆周上有 2019 只蚂蚁，初始位置各不相同，一开始每只蚂蚁各选一个方向（顺时针，逆时针）以相同的速度开始运动，若两只蚂蚁相撞，则它们立刻反向以相同的速度运动. 证明：每只蚂蚁都经过圆上的每一点.

证法一： 设顺时针的速度为 $+1$，逆时针的速度为 -1，设所有蚂蚁运动的距离（顺时针为正，逆时针为负）之和为 l，由于 $2\nmid 2019$，所以速度之和始终恒定且不为 0，l 与时间成正比. 那么时间足够充分之后，必有一只蚂蚁的运动的距离大于 2 倍周长.

注意到任意两只蚂蚁运动的距离差不超过周长，所以只要有一只蚂蚁跑完 2 圈，那么其他蚂蚁必然跑了一圈. 所以当时间足够充分后，每只蚂蚁运动的距离都大于周长. **（解题人：罗 炜）**

证法二： 设顺时针的速度为 $+1$，逆时针的速度为 -1，我们把所有蚂蚁的速度之和定义为合速度.

由题意，两只蚂蚁相撞后立刻原速反向，所以合速度的大小与正负（方向）始终不变.

再注意到 2019 是奇数，所以合速度不为 0.

我们注意到 2019 只蚂蚁的排序始终不变（两只相撞就反向，所以相对顺序不会改变），于是合速度始终朝着一个方向，于是所有蚂蚁的位移之和趋向无穷大，这里位移理解为矢量，顺时针为正，逆时针为负，所以必有一只蚂蚁的位移趋向无穷大，那么这只蚂蚁一定可以跑完整个圆周.

结合所有蚂蚁的位置排序不发生改变，所以这只跑完圆周的蚂蚁不会超越它前面的那只蚂蚁（顺着运动方向的第一只蚂蚁），所以前面的蚂蚁也能跑完一圈，反复下去，所有蚂蚁都能跑完一圈. **（解题人：吴宇培）**

题 3. 设 f 是平面上的双射，证明：f 是保内心映射，当且仅当 f 保外心，并且不会把钝角三角形映射成锐角三角形. 并求所有的保内心映射.

证明： 从一个保内心映射 f 开始.

1. f 将不共线三点映射为不共线三点. 这从定义给出，注意不能直接说 f 将共线的点映射为共线的点. 这个性质等价说法是，如果三点的像共线，则这三点共线.
2. 若某不共线三点 A,B,C 的像是等腰三角形 $f(A)f(B)=f(A)f(C)$，则 $AB=AC$. 证明如下：设 ABC 的内心为 I，IBC 的内心为 J，则 $f(A)f(B)=f(A)f(C)$ 说明 $f(A),f(I),f(J)$ 共线，说明 A,I,J 共线，说明 $AB=AC$.
3. 若 A,B,C 构成等边三角形，则 $f(A),f(B),f(C)$ 构成等边三角形. 否则，取 $f(O)$ 为 $f(A),f(B),f(C)$ 外心，得到三个等腰三角形 $f(OAB),f(OBC),f(OAC)$. 因为 O 不能和 A,B,C 任何一个相同（用双射），所以 OAB,OBC,OCA 中至少两组是构成三角形的（不共线），根据第 2 条，这是等腰三角形. 因此 O 是 ABC 外心.O 也是内心，因此 $f(O)$ 也同时是 $f(ABC)$ 外心和内心，因此 $f(A),f(B),f(C)$ 构成等边三角形.
4. 若 A,B,C 共线，则 $f(A),f(B),f(C)$ 共线. 否则在 $f(A),f(B)$ 直线上找 $f(D),f(E)$ 与 $f(C)$ 构成等边三角形，根据第 1 条，D,E 在直线 A,B 上.C 也在直线 AB 上. 直线 AB 外还有两个点 F,G 与 D,E 构成等边三角形，则 $f(F),f(G)$ 之一落在 $f(C)$，与双射矛盾.
5. 若不共线三点 A,B,C 满足 $AB=AC$，则 $f(A)f(B)=f(A)f(C)$. 设 I 是 ABC 内心，J 是 IBC 内心，则 AIJ 共线，因此像共线，由前面说法，$f(ABC)$ 是等腰三角形.
6. 菱形映射为菱形，将共线等距分布三点扩充成菱形和中心，利用共线性和距离相等性可知共线等距三点映射为共线等距三点.
7. 垂直直线上选取交点和另外四点构成菱形，则像也是菱形及中心，因此 f 将垂直的直线映射为垂直的直线.
8. 设 A,B,C 是共线三点，B 在 A,C 之间，过 B 的垂直直线上有点 D，$CD=CA$，也有点 E，$AE=AC$. 根据 D,E 存在性可知，共线的 $f(A),f(B),f(C)$ 必然满足 $f(B)$ 在 $f(A),f(C)$ 之间. 这一条说明了直线上的保序性.
9. 直线到它的像是线性映射. 根据保等距性，知道将整数点映射为等距序列；进一步在直线上到原点（选定的一点）距离为有理数倍单位的点上映射是线性的；根据保序性，直线上所有点是线性的.
10. 选两条垂直直线，映射到它的像分别是线性的. 利用共线，交点设为原点，也映射为交点. 根据保持等距性，两个直线上的线性因子相同. 根据保证垂直性，平面上其他每个点可以和已知两条直线上的点及原点形成矩形，这样用保垂直性唯一确定它的像. 最终所有保内心映射为刚体变换复合位似变换.

现在设 f 是一个保外心映射，不将钝角三角形映射为锐角三角形.

1. f 将共线点映射为共线点. 设 A,B,C 共线，取 D,E，使 DE 垂直平分线过 A,B,C. 则 A,B,C 都可以成为 D,E,X 的外心，X 是某点. 因此 $f(A),f(B),f(C)$ 也分别是 $f(D),f(E),f(X)$ 的外心，因此 $f(D),f(E)$ 的垂直平分线过 $f(A),f(B),f(C)$，得证.
2. f 将等腰三角形映射为等腰三角形.$AB=AC$ 则 A 可以成为某 BCD 外心，于是 $f(A)$ 是 $f(B)f(C)f(D)$ 外心，$f(A)f(B)=f(A)f(C)$.
3. 后面的部分可以超保内心映射的论述，可以不用到将钝角三角形映射为锐角三角形这个条件. 这个条件证明直线上保序性时候方便一些.

4. 两个保心映射最终都是刚体变换复合位似，这类变换显然也是保这两个心的，因此等价.

（解题人：罗 炜）

题 4. 给定 l 个实数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l$，证明：存在正整数 k 和正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$，

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = 1,$$

对任意的正整数 $n\le k$ 和任意正整数 $m\le l$，都有

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j \sin(j\theta_m)\right| \le \frac{1}{2018n}.$$

证明： 要先证明如下引理以及 a_i 的大致取法.

引理： 对于任意首一的实系数多项式 $P(x)$，若 P 没有非负实数根，则存在正整数 α，使得 $(x+1)^\alpha P(x)$ 的各项系数皆为正数.

引理的证明： 显然结论对 $\deg P=1$ 成立.

若我们已经证明了结论对 $\deg P=2$ 也成立，则当 $\deg P>2$ 时，若结论对小于 $\deg P$ 成立，根据代数基本定理，总可以设 $P(x)=(x^2+ax+b)Q(x)$，其中 $x^2+ax+b, Q(x)$ 都没有非负实根.

由归纳假设，存在正整数 β,γ 使得 $(x+1)^\beta(x^2+ax+b)$ 系数全正，$(x+1)^\gamma Q(x)$ 的系数全正，所以 $(x+1)^{\beta+\gamma}P(x)$ 的各项系数全正. 所以我们只需要处理 $\deg P=2$ 的情况，此时可以设 $P(x)=(x-a)^2+b$，$b+a^2>0$，设 $(x+1)^k(x-a)^2+b$ 中 x^n 系数为 A_n.

易见 $A_{k+2},A_0>0$，$A_{k+1}=k-2a$，$A_1=(a^2+b)k-2a$，当 k 充分大时，$A_1,A_0>0$. 当 $1<n\le k$ 时，

$$A_n=(a^2+b)C_k^n-2aC_k^{n-1}+C_k^{n-2}=C_k^{n-1}[\frac{k-n+1}{n}(a^2+b)-2a+\frac{n-1}{k-n+1}],$$

我们希望

$$a^2-2\frac{n}{k-n+1}a+b+\frac{n(n-1)}{(k-n+1)(k-n+2)}=(a-\frac{n}{k-n+1})^2+b-\frac{n(k+1)}{(k-n+1)^2(k-n+2)}>0\cdots\cdots(1)$$

若 $2a<\dfrac{n-1}{k-n+1}$，由 (1) 式左边知结论成立；若 $2a\ge\dfrac{n-1}{k-n+1}$，则 $n\le\dfrac{k+2+\frac{1}{2a}}{1+\frac{1}{2a}}\sim\dfrac{2a}{2a+1}k, k\to+\infty$.

此时 $\dfrac{n(k+1)}{(k-n+1)^2(k-n+2)}<O\left(\dfrac{1}{k}\right)\to 0, k\to+\infty$.

所以可以选择充分大的 k 满足要求.

回到原题.

设

$$P(z)=\prod_{j=1}^{l}(z-e^{i\theta_j})(z-e^{-i\theta_j}),$$

根据引理，存在正整数 α(只依赖于 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l$)，$f(z)=(z+1)^\alpha P(z)$ 的各项系数皆为正数，这些系数从高此项到低次项依次是 $b_t,b_{t-1},\cdots,b_1(>0)$.

我们注意到: 每一段求和

$$\sum_{j=1}^{t} b_j (e^{i\theta_m})^j = f(e^{i\theta_m}) = 0,$$

所以

$$0 = \sum_{j=1}^{t} b_j Im\left((e^{i\theta_m})^j\right) = \sum_{j=1}^{t} b_j \sin(j\theta_m).$$

设 $b_1 + b_2 + \cdots + b_t = f(1) = A$ 是只依赖于 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l$ 的常数, 于是我们考虑取 $k = ts$, s 是待定的正整数, 取 $a'_{i+at} = \dfrac{b_i}{2018A(a+1)t}$, 我们只要处理每一段中的情况.

由于调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ 是发散的, 我们可以取 s 充分大, 使得

$$\sum_{i=1}^{k} a'_i = \sum_{a=0}^{s-1} \sum_{i=1}^{t} \frac{b_i}{2018A(a+1)t} = \sum_{i=1}^{t} \frac{b_i}{2018At} \sum_{a=0}^{s-1} \frac{1}{a+1} \geq 1.$$

我们取 $a_i = \dfrac{a'_i}{\sum_{i=1}^{k} a'_i}$, 于是 $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$. 若 $at < n \leq (a+1)t$, $t \in \{0, 1, \cdots, s-1\}$, 则

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n} a_j \sin(j\theta_m)\right| &= \left|(\sum_{i=1}^{k} a'_i) \sum_{b=0}^{a-1} \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{2018A(b+1)t} b_j \sin(j\theta_m) + \sum_{j=at+1}^{n} a_j \sin(j\theta_m)\right| \\
&= \left|\sum_{j=at+1}^{n} a_j \sin(j\theta_m)\right| \leq \left|\sum_{j=at+1}^{n} a'_j \sin(j\theta_m)\right| \\
&= \frac{1}{2018At(a+1)} |b_{n-at} \sin(n\theta_m) + \cdots + b_1 \sin((at+1)\theta_m)| \\
&\leq \frac{1}{2018At(a+1)} |b_1 + b_2 + \cdots + b_t| \\
&= \frac{1}{2018t(a+1)} \\
&\leq \frac{1}{2018n}.
\end{aligned}$$

这就证明了结论. **（解题人：罗 炜　吴宇培）**

注：本题在讨论时，一位前 IMO 金牌得主给出“证明引理及 a_i 大致取法”的提示，感谢为国争光的国手.

题 5. 设 n 是正整数，非负整数序列 $b_1 = 0, b_2, \ldots, b_n$ 满足：对任何 $1 \leq u, v \leq n$，有

$$\frac{1}{u}(b_1 + b_2 + \cdots + b_u) < \frac{1}{v}(b_1 + b_2 + \cdots + b_v + 1).$$

求所有这样的序列 $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ 的个数.

解：记 $S_u = b_1 + b_2 + \cdots + b_u$, 则 $S_1 = 0$，$\{S_i\}$ 是非减整数序列，方程为 $\dfrac{S_u}{u} < \dfrac{S_v + 1}{v}$.

取 $v = 1$, 得 $S_u < u$.

设 $\dfrac{S_v + 1}{v}$ 的最小值在 $v = w$ 达到, 并且如果有多个符合条件的, 取最小的 w. 则方程等价于

$$\frac{S_u}{u} < \frac{S_w + 1}{w} \leq \frac{S_u + 1}{u},$$

因此 S_u 是不小于 $u\dfrac{S_w+1}{w}$ 的最小整数, 即上取整, 由 $\dfrac{S_w+1}{w}$ 和 u 唯一确定.

如果最大公约数 $(S_w+1,w)=d>1$, 则 $S_{w/d}=(S_w+1)/d-1$, 与 w 最小性矛盾.

因此所求数列由一个分母不超过 n 的既约分数确定.

反之，给定既约分数 $0<a/b<1$, 分母 $b\le n$, 如上定义 $S_u, 1\le u\le n$ 为 ua/b 的上取整减一, 显然 S_i 非减, $S_1=0$, 符合题目条件. 分母不超过 n 的要求保证上面求上取整时有某个 S_u+1 恰好是对应的上取整, 这样不会有两个分数 $\dfrac{a}{b},\dfrac{c}{d}$ 得到同一个序列的情形.

因此所求序列个数为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(i)$，其中 $\varphi(i)$ 是欧拉函数. **（解题人：罗 炜）**

题 6. p 是一个素数，求所有正整数对 (p,n)，使得我们可以将 $1,2,\cdots,n^2$ 分成 n 组，每组都有 n 个数，且每一组数的和都是 p 的非负整数幂.

解： 所求 $(p,n)=(p,1),(5,2)$.

显然 $(p,1)$ 总是符合要求的. $n=2$ 时, 易见 $p=5$. 当 $n>2$ 时, 设

$$\frac{1}{2}n^2(n^2+1)=p^{\alpha_1}+p^{\alpha_2}+\cdots+p^{\alpha_n},\alpha_1\le\alpha_2\le\cdots\le\alpha_n.$$

显然有 $p^{\alpha_1}\ge 1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

当素数 $p>2$ 时, 由于 $\gcd(n^2,n^2+1)=1$, 则 $p^{\alpha_1}\mid n^2$ 或 $p^{\alpha_1}\mid n^2+1$.

若 $p^{\alpha_1}\mid n^2$, 由于 $\dfrac{n^2}{p^{\alpha_1}}\le\dfrac{2n^2}{n(n+1)}<2$, 所以 $n^2=p^{\alpha_1}$, 于是

$$\frac{1}{2}p^{\alpha_1}(p^{\alpha_1}-1)=p^{\alpha_2}+\cdots+p^{\alpha_n},$$

所以 $p^{\alpha_2}\mid p^{\alpha_1}$. 由于 $p^{\alpha_1}+p^{\alpha_2}\ge 1+2+\cdots+2n=n(2n+1)$, 所以 $p^{\alpha_2}\ge n^2+n>p^{\alpha_1}$, 矛盾.

若 $p^{\alpha_1}\mid n^2+1$, $\dfrac{n^2+1}{p^{\alpha_1}}\le\dfrac{2n^2+2}{n(n+1)}<2$, 所以 $n^2+1=p^{\alpha_1}$, 则

$$p^{\alpha_1}+p^{\alpha_2}\ge 1+2+\cdots+2n=n(2n+1),$$

则

$$p^{\alpha_2}\ge n^2+n-1,$$

由于

$$\frac{1}{2}n^2(n^2+1)-p^{\alpha_1}=\frac{1}{2}(n^2-2)(n^2+1)=p^{\alpha_2}+\cdots+p^{\alpha_n},$$

所以 $p^{\alpha_2}\mid n^2(n^2+1)$, 但是 $p^{\alpha_2}\ge n^2+n-1>\max\{n^2-2,n^2+1\}$, 矛盾.

当 $p=2$ 时,

$$n^2(n^2+1)=2(2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\cdots+2^{\alpha_n}),$$
$$2^{1+\alpha_1}=2\cdot 2^{\alpha_1}\ge 2(1+2+\cdots+n)=n(n+1).$$

由于 $\gcd(n^2,n^2+1)=1$, 所以 $2^{1+\alpha_1}\mid n^2$ 或 $2^{1+\alpha_1}\mid n^2+1$, 但 $2^{1+\alpha_1}\ge n(n+1)>\max\{n^2,n^2+1\}$, 矛盾.

综上, 所求 $(p,n)=(p,1),(5,2)$. **（解题人：吴宇培）**

题 7. 设函数 $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$，$f$ 单调不增. 给定常数 $C>0$, $\alpha>0$, $\beta>1$，对任意的 $x>y\geq 0$，都有

$$f(x)\leq \frac{C}{(x-y)^{\alpha}}f(y)^{\beta}.$$

证明：0 属于 f 的值域.

证明： 固定 y_0, 寻找常数 d, $y_n=y_0+d-\frac{d}{2^n}$, 于是

$$f(y_{n+1})\leq \frac{C2^{(n+1)\alpha}}{d^{\alpha}}f(y_n)^{\beta}.$$

我们希望 $f(y_n)\leq \frac{f(y_0)}{2^{xn}}(n\geq 0)$, 其中 x 待定.

结论对 $n=0$ 显然成立. 若我们证明了结论对 $n(\geq 0)$ 成立, 则

$$f(y_{n+1})\leq \frac{Cf(y_0)^{\beta-1}}{d^{\alpha}}\frac{f(y_0)}{2^{xn\beta-(n+1)\alpha}}.$$

为了使归纳法成立, 我们希望 $2^{xn\beta-(n+1)\alpha}\geq 2^{x(n+1)}$, 暂取 $x=\frac{\alpha}{\beta-1}$, 此时,

$$f(y_{n+1})\leq \frac{2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}Cf(y_0)^{\beta-1}}{d^{\alpha}}\frac{f(y_0)}{2^{x(n+1)}}.$$

现在我们只要让 d 满足 $\frac{2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}Cf(y_0)^{\beta-1}}{d^{\alpha}}\leq 1$ 即可.

于是我们可以选择常数 d 及存在 $x=\frac{\alpha}{\beta-1}$, 使得 $f(y_n)\leq \frac{f(y_0)}{2^{xn}}$ 成立.

由于 f 单调不增, 所以

$$0\leq f(y_0+d)\leq f(y_n)\leq \frac{f(y_0)}{2^{xn}},$$

令 $n\to+\infty$, 由于 y_0+d 不依赖于 n, 两边极限是 0, 所以 $f(y_0+d)=0$.

证毕. **（解题人：罗 炜）**

注： 这是一道数学分析的题目, 证法整理自朋友爆的书.（De Giorgi 迭代, 见《二阶椭圆型方程与椭圆型方程组》第 7 页引理 4.1）

题 8. 证明：$x^4-20200y^2=1$ 在 $\mathbb{Z}_+^2$ 上无解.

证明： 首先证明几个引理:

引理 1： 方程 $x^4-2y^2=1$ 无正整数解.

引理 1 的证明： 若 $x^4-2y^2=1$, 则 $(x^2-1)(x^2+1)=2y^2$, 而 $(x^2-1,x^2+1)=2$, 所以 x^2-1 与 x^2+1 之中有一个是完全平方数, 矛盾 (考察平方数的间距).

引理 2： 方程组 $\begin{cases}a^2-b^2=c^2+d^2\\ ab=cd\end{cases}$ 无正整数解.

引理 2 的证明： 若正整数 a,b,c,d 满足 $a^2-b^2=c^2+d^2, ab=cd$, 取一组正整数解 (a,b,c,d) 使 a 最小.

若存在素数 $p\mid(a,b)$, 则 $p\mid cd$, $p\mid c^2+d^2$, 从而 $p\mid c$, $p\mid d$, 此时 $\left(\frac{a}{p},\frac{b}{p},\frac{c}{p},\frac{d}{p}\right)$ 也是解, $\frac{a}{p}<a$, 与 a 的最小性矛盾. 所以 $(a,b)=1$, 同理有 $(c,d)=1$.

设 $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}=\frac{m}{n}$, 正整数 m,n 互素.

我们设 $a=km,b=kn$, $d=ml,b=nl$, k,l 是正整数, m,n,k,l 两两互素.

由于 $m^2k^2-n^2l^2=n^2k^2+m^2l^2$, 得 $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}=\frac{l^2}{k^2}$, 由 $(m,n)=1$ 知 $(m^2-n^2,m^2+n^2)=1$ 或 2.

(1) 若 $(m^2-n^2,m^2+n^2)=1$, 由勾股数公式知：$2\nmid m$, $2\mid n$, $m=A^2+B^2=C^2-D^2$, $n=2AB=2CD$, 则 $AB=CD$, 其中 A,B,C,D 是正整数. $a=km\geq m=C^2-D^2\geq C+D>C$, 矛盾.

(2) 若 $(m^2-n^2,m^2+n^2)=2$, 则 $m^2-n^2=2l^2$, $m^2+n^2=2k^2$, 进而 $k^2-l^2=n^2$, $k^2+l^2=m^2$, 类似 (1) 可得矛盾.

引理 3： 方程 $2x^2-y^4=1$ 仅有一个正整数解 $(1,1)$.

引理 3 **的证明**：若 $2x^2-y^4=1$, 则 $\left(\frac{y^2+1}{2}\right)^2+\left(\frac{y^2-1}{2}\right)^2=x^2$.

若 $y>1$, 则由勾股数公式, $\frac{y^2+1}{2}=a^2-b^2$, $\frac{y^2-1}{2}=2ab$.

于是 $a^2-b^2=\left(\frac{y+1}{2}\right)^2+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2$, $ab=\frac{y+1}{2}\frac{y-1}{2}$, 由引理 2 可得矛盾. 所以 $y=1$, $x=1$.

下面回到原题： 我们证明 $x^4-202y^2=1$ 在 $\mathbb{Z}_+^2$ 上无解. 若正整数 x,y 满足 $(x^2-1)\left(\frac{x^2+1}{2}\right)=101y^2$.

(1) 若 $x^2-1=a^2$, $x^2+1=202b^2$, $x^2\equiv 0,1 \pmod 3$, 所以 $b^2\equiv 2 \pmod 3$ 或 $a^2\equiv 2 \pmod 3$, 矛盾.

(2) 若 $x^2-1=101a^2$, $x^2+1=2b^2$, 则 $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2=b^2$, 从而 $\left\{\frac{x+1}{2},\frac{x-1}{2}\right\}=\{m^2-n^2,2mn\}$, 其中, m,n 一奇一偶且互素, 于是 $|m^2-n^2-2mn|=1$. $mn(m+n)(m-n)=202\left(\frac{a}{4}\right)^2$, 由于 $m,n,m-n,m+n$ 两两互素, 所以 $m-n$ 与 $m+n$ 之中必有一个是完全平方数.

(2.1) $m+n$ 是完全平方数：

若 $m^2-n^2-2mn=1$, 则 $2m^2=(m+n)^2+1$, 由引理 3 知, $m+n=1$, 矛盾.

若 $m^2-n^2-2mn=-1$, 则 $(m+n)^2-2m^2=1$, 由引理 1 可得矛盾.

(2.2) $m-n$ 是完全平方数：

若 $m^2-n^2-2mn=1$, 则 $(m-n)^2-2n^2=1$, 与引理 1 矛盾.

若 $m^2-n^2-2mn=-1$, 则 $(m-n)^2+1=2n^2$, 由引理 3 可得 $m-n=n=1$, 与

$$mn(m+n)(m-n)=202\left(\frac{a}{4}\right)^2$$

矛盾.

证毕. **（解题人：龚 固）**

2019 年清华大学数学秋令营试题解析

题 1. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=5$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$，求 a_{1000} 的十分位和百分位.

解： 需要这样的估计式，用对数函数的单调性可以得到

$$\ln\frac{n}{m-1}=\int_{m-1}^{n}\frac{1}{t}\,dt>\sum_{i=m}^{n}\frac{1}{i}>\int_{m}^{n+1}\frac{1}{t}\,dt=\ln\frac{n+1}{m}.$$

从初始递推方程开始，平方后得到

$$a_{n+1}^2=a_n^2+2+\frac{1}{a_n^2}. \tag{1}$$

因此 $a_n\geq 25+2n$，代入 (1) 得到

$$2+\frac{1}{25+2n}\geq a_{n+1}^2-a_n^2\geq 2.$$

因此求和得到

$$a_n\leq 25+2n+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{25+2i},$$

当 $n\leq 1000$ 时，

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{25+2i}\leq\frac{1}{2}\ln\frac{1011.5}{11.5}<2.5.$$

$25+2n<a_{n+1}^2<27.5+2n$，对 $n\leq 1000$ 成立. 再代入 (1)，求和得到

$$2025+\sum_{i=0}^{999}\frac{1}{27.5+2n}<a_{1000}^2<2025+\sum_{i=0}^{999}\frac{1}{25+2n},$$

左端至少是 $2025+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1013.75}{13.75}>2027$，右端不多于 2027.5.

因为 $45.02^2=2026.8004$，$45.03^2=2027.7009$，因此 a_n 的十分位是 0，百分位是 2. **（解题人：罗 炜）**

题 2. 已知正数集 A，满足 $|A|=n$，求证：存在 $B\subset A$ 且 $\log_2 n\geq |B|$，满足对 $\forall\, b_i,b_j\in B$，

$$b_i+b_j\notin A，其中\ b_j\neq b_i.$$

证明： 按这样的贪心方法选择 B 中元素：从最大的元素开始扫描，能加入 B 中不和已有 B 中元素冲突就加，否则跳过这个数.

下面估计这样能得到多少个 A 中元素.

将 A 中元素从大到小排列 $a_1>a_2>\cdots>a_n$.

用函数 $f(k)$ 表示扫描过 a_k 之后，贪心法加入到 B 中的元素个数，则 $k-f(k)$ 是没有加入 B 中的元素个数.

显然，A 中最大两个元素可以加入 B 中，$f(1)=1, f(2)=2$.

扫描过 a_k 以后不能加入 B 中的元素 $a_j, j\leq k$ 一定是和当时已有的某个 B 中元素 $a_i, i<j$ 求和等于某个

A 中元素 $a_m, m < i$. 而 i, m 唯一决定 j，因此这样的 a_j 个数不超过对应 i, m 对个数，即

$$\sum_{a_i \in B, i<k} (i-1) \geq k - f(k),$$

整理得到（中间要考虑 a_k 是否在 B 中，多减了一个 1）

$$\sum_{a_i \in B, i<k} i \geq k - 1.$$

若用 $t_1 = 1, t_2 = 2, \ldots$ 表示加入 B 中的 a_i 的指标 i 从小到大排列的序列. 对 $k = t_{i+1}$ 应用上式可以得到

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_i \geq t_{i+1} - 1.$$

不难归纳得到 $t_i \leq 2^i$，而最终 $t_1 + t_2 + \cdots + t_{|B|} \geq n - 1$，所以 $|B| \geq \log_2 n$. **（解题人：罗 炜）**

题 3. 若 $a, b, c, n \in N^+$，$(a, b, c) = 1$. 记 $M(n)$ 为 $ax + by + cz = n$ 的非负整数解 (x, y, z) 的组数，求

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M(n)}{n^2}.$$

解：首先证明 $ax + by = m$ 关于 (x, y) 的解数为 $\begin{cases} 0 & ,(a,b)\nmid m, \\ \dfrac{(a,b)m}{ab} + O(1) & ,(a,b)\mid m. \end{cases}$.

$(a, b) \nmid m$ 时显然.

设 $d = (a, b) \mid m$，设 $a = da_1, b = db_1$，$m = dm_1$，所以原式 $\Leftrightarrow a_1x + b_1y = m_1$.

在 $m > ab - a - b$ 时，$a_1x + b_1y = m_1$ 有特解 $(x_0, y_0) \in N^2$，所以其通解为 $\begin{cases} x = x_0 + kb_1, \\ y = y_0 - ka_1. \end{cases}$.

令 $x_0 + kb_1 \geq 0, y_0 - ka_1 \geq 0$，得 $-\dfrac{x_0}{b_1} \leq k \leq \dfrac{y_0}{a_1}$，即 $\dfrac{y_0}{a_1} - \dfrac{m_1}{a_1b_1} \leq k \leq \dfrac{y_0}{a_1}$.

该区间整数个数为 $\dfrac{m_1}{a_1b_1} + c(m)$ 个，其中 $|c(m_1)| \leq 2$，每个 k 对应一个解 (x, y)，所以解数为

$$\frac{m_1}{a_1b_1} + c = \frac{m(a,b)}{ab} + O(1).$$

其次，由于 $(c, (a, b)) = 1$，所以

$$\begin{aligned} & ax + by = n - cz_0 \text{ 有解 } (x, y) \\ & \Leftrightarrow cz_0 \equiv n \pmod{(a,b)} \\ & \Leftrightarrow z_0 \equiv n \cdot c^{-1} \pmod{(a,b)}. \end{aligned}$$

另外，由于 $\dfrac{(n-cz)(a,b)}{ab}$ 是线性函数（关于 z），所以

$$\begin{aligned} \sum_{0\leq z\leq \frac{n}{c}} \frac{(n-cz)(a,b)}{ab} &= \frac{1}{(a,b)} \sum_{0\leq z\leq \frac{n}{c}} \frac{(n-cz)(a,b)}{ab} + \sum_{0\leq z\leq \frac{n}{c}} O(1)\frac{(a,b)}{ab} \\ &= \frac{1}{(a,b)} \sum_{0\leq z\leq \frac{n}{c}} \frac{(n-cz)(a,b)}{ab} + o(n^2). \end{aligned}$$

原方程

$$\sum_{\substack{cz\equiv n \pmod{(a,b)}\\ 0\le z\le \frac{n}{c}}}\left(\frac{(n-cz)(a,b)}{ab}+O(1)\right)=\left(\sum_{0\le z\le \frac{n}{c}}\frac{(n-cz)(a,b)}{ab}\right)\cdot\frac{1}{(a,b)}+o(n^2)+n\cdot O(1)$$

$$=\sum_{0\le z\le \frac{n}{c}}\frac{(n-cz)}{ab}=\sum_{\substack{0\le t\le n\\ c|t}}\frac{n-t}{ab}=\left(\sum_{0\le t\le n}\frac{n-t}{ab}\right)\frac{1}{c}+o(n^2)$$

$$=\sum_{0\le t\le n}\frac{n-t}{abc}=\frac{\sum\limits_{0\le t\le n} t}{abc}=\frac{1}{2abc}\cdot n^2+o(n^2).$$

（解题人：姚博文）

题 4. 在平面直角坐标系中有一椭圆盘，其内部的整点数为 L，椭圆面积为 S，周长为 P，求证：

$$L\le \frac{P}{2}+S+1.$$

证明：设椭圆内部整点集为 A，取 A 的凸包 K 为整点凸多边形.

凸集 K 包含于椭圆，因此 K 的面积 $S(K)$ 和周长 $P(K)$ 分别小于 S 和 P.

设 K 的内部和边界上分别有 L_1, L_2 个点.

根据匹克定理，$S(K)=L_1+\frac{L_2}{2}-1$. 而在 K 的周长上，任何两个整点距离至少是 1，因此 $L_2\le P(K)\le P$.

又有 $L=L_1+L_2$，因此

$$L=L_1+L_2=S(K)+1+\frac{L_2}{2}\le S+1+\frac{P}{2}.$$

（解题人：罗 炜）

题 5. $A_1A_2A_3A_4$ 是圆内接四边形，$A_iA_{i+1}=a_i$ $(A_5=A_1)$，圆心 O 到 A_iA_{i+1} 距离记为 h_i. 求证：

$$R^2\left(\sum_{i=1}^{4}a_i^2\right)<2a_1a_2a_3a_4\left(\sum_{1\le i<j\le 4}\frac{h_ih_j}{a_ia_j}\right)，其中\ R\ 为半径.$$

证明：设 J_1, J_2, J_3, J_4 分别为 a_1, a_2, a_3, a_4 所对的圆周角，则 $\sum\limits_{i=1}^{4}J_i=\pi$，$a_i=2R\sin J_i, h_i=\cos J_i$.

目标不等式等价于

$$\sum_{i=1}^{4}\sin^2 J_i<2\sum_{1\le i<k\le 4}\sin J_i\sin J_k\cos J_m\cos J_n,$$

其中 m, n 是 $\{1,2,3,4\}$ 中去掉 i, k 剩下的两个指标.

利用

$$\sin A\cos B\sin C\cos D+\sin A\cos B\cos C\sin D=\sin A\cos B\sin(C+D)$$

及 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin(A+B)$，还有四个 J_i 之和为 π，得到目标不等式等价于

$$\sum_{i=1}^{4}\sin^2 J_i<\sin^2(J_1+J_2)+\sin^2(J_1+J_3)+\sin^2(J_1+J_4).$$

不妨设 J_1 最大，考虑函数

$$f(x)=\sin^2(J_1+x)-\sin^2 x=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos(2J_1+2x))=\sin J_1\sin(J_1+2x).$$

三个角度 $J_1+2J_2, J_1+2J_3, J_1+2J_4$ 之和为 $2\pi+J_1$，因此分别对应于圆上的三个弦长的一半，这三个弦长与一个长度为 $2\sin J_1$ 的弦可构成一个封闭的四边形，因此

$$\sin(J_1+2J_2)+\sin(J_1+2J_3)+\sin(J_1+2J_4)>\sin J_1.$$

得证. **（解题人：罗 炜）**

题 6. 设 p 为奇素数，求证：$\sum\limits_{i=1}^{p-1} i^{p-1}\equiv(p-1)!+p \pmod{p^2}$.

证法一： 考虑

$$f(x)=:(x-1)(x-2)\cdots[x-(p-1)]+1-x^{p-1}=a_{p-2}x^{p-2}+\cdots+a_1x+(p-1)!+1.$$

于是我们只要证明 $\sum\limits_{x=0}^{p-1} f(x)\equiv 0 \pmod{p^2}$ 即可.
注意到, $\deg f=p-2$, 但在模 p 意义下, $1,2,\cdots,p-1$ 这 $p-1$ 个数是 f 的根.
根据数论的 Lagrange 定理知：f 的每一项系数都是 p 的倍数.

$$\sum_{x=0}^{p-1} g(x)=\sum_{x=0}^{p-1}\sum_{i=1}^{p-2} a_i x^i=\sum_{i=1}^{p-2}\left(a_i\sum_{x=0}^{p-1} x^i\right).$$

由于 a_i 都是 p 的倍数, 以及

$$\sum_{x=1}^{p-1} x^i=\sum_{j=1}^{p-1}(g^j)^i=\frac{g^i(g^{i(p-1)}-1)}{g^i-1}=\begin{cases}0, & 若\ p-1\nmid i\\ -1, & 若\ p-1\mid i\end{cases},$$

其中, g 是模 p 的原根. 求和上标 $1\le i\le p-2$, 所以 $\sum\limits_{x=0}^{p-1} g(x)\equiv 0 \pmod{p^2}$, 于是我们得到

$$\sum_{x=0}^{p-1} f(x)\equiv p[(p-1)!+1]\equiv 0 \pmod{p^2}.$$

证毕. **（解题人：吴宇培）**

注： 关于原根的那个结论在处理这种多项式求和时十分有用. 我的母校南京师范大学数科院的纪春岗老师给去年 3 月根源杯提供的第四题也用到了这个结论. 一旦出现这样的多项式求和, 该结果很有用, 有兴趣读者可以看看 2012 年 IMO Shortlists N8.

证法二： 根据费马小定理，可以找到整数 $x_1,...,x_{p-1}$ 使得 $j^{p-1}=1+px_j$ 对 $1\le j<p$ 成立.
将这些式子做连乘，展开并模 p^2 计算，可得

$$(p-1)!^{p-1}\equiv(1+px_1)(1+px_2)...(1+px_{p-1})\equiv 1+p(x_1+...+x_{p-1}) \pmod{p^2}.$$

其次，威尔逊定理给出 $(p-1)! = kp-1$，k 是整数，则

$$(p-1)!^{p-1} = (-1+kp)^{p-1} \equiv (-1)^{p-1} + (-1)^{p-2}(p-1)pk \equiv 1+pk \pmod{p^2}.$$

因此

$$\begin{aligned}1^{p-1}+2^{p-1}+...+(p-1)^{p-1} &= p-1+p(x_1+...+x_{p-1})\\ &\equiv p-1+kp \equiv p+(p-1)! \pmod{p^2}.\end{aligned}$$

（解题人：罗 炜）

题 7. 对 $n \geq 4$，设 P 是圆内接 n 边形，用 $(n-3)$ 条对角线将 P 分为没有公共面积的 $(n-2)$ 个三角形，L 是这些三角形的内切圆半径之和. 求证：L 不随对角线的分割方式而改变.

证明：我们先证命题对圆内接四边形成立.

不妨设圆的半径为 R，四边形的四条边所对圆周角为 A, B, C, D. 则有两种剖分方式，其中一种的两个三角形的三边长分别为 $2R\sin A, 2R\sin B, 2R\sin(A+B)$；$2R\sin C, 2R\sin D, 2R\sin(C+D)$.

内接圆半径为三角形面积两倍除以周长，因此其中一个三角形内接圆半径，为 $2R$ 乘以

$$\begin{aligned}\frac{\sin A\sin B\sin(A+B)}{\sin A+\sin B+\sin(A+B)} &= \frac{\frac{1}{2}(\cos(A-B)-\cos(A+B))\sin(A+B)}{2\sin(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})+2\sin(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A+B}{2})}\\ &= \frac{(\cos^2(\frac{A-B}{2})-\cos^2(\frac{A+B}{2}))2\cos(\frac{A+B}{2})}{2\cos(\frac{A-B}{2})+2\cos(\frac{A+B}{2})}\\ &= \cos(\frac{A-B}{2})\cos(\frac{A+B}{2})-\cos^2(\frac{A+B}{2})\\ &= \frac{1}{2}(\cos A+\cos B)-\frac{1+\cos(A+B)}{2}.\end{aligned}$$

利用

$$A+B+C+D=\pi, \quad \cos(A+B)+\cos(C+D)=0,$$

因此剖分形成的两个三角形的内切圆半径之和为 $\dfrac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C+\cos D-1)$，与剖分无关.

对于一般的情形，可以每次选择剖分中两个有公共边的三角形，将这两个三角形合并成的四边形，用另一种方式剖分，这样形成一个操作，从一个剖分变成另一个剖分.

根据前面结果，操作前后的剖分的所有三角形内切圆半径之和不变. 任何两个剖分可以通过多次这种操作转换，因此所有剖分形成的三角形内切圆半径之和都相同.

事实上，可以用上面的剖分操作，将任何剖分变成这样的剖分：

所有剖分用到的对角线从顶点 1 出发. 设有剖分，从顶点 1 出发的对角线没有全部用到，例如 $1, j$ 没有用到，但 $1, j-1$ 用到，设 $k > j$ 是最小的 k，使得 $1, k$ 用到. 则剖分中有三角形 $1, j-1, k$，设 $j-1, l, k$ 是剖分中与这个三角形相邻的三角形，其中 $j-1 < l < k$. 则前面操作将剖分中边 $j-1, k$ 去掉，换成边 $1, l$. 因此增加了一条从 1 出发的边. 归纳可得，所有剖分变成同一个剖分，用到的对角线都是从 1 出发.

证毕.

（解题人：罗 炜）

题 8. 设 $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$，满足 $|A| \geq 4\sqrt{n}$. 求证：存在 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ 成等差数列，且 x_i 为 A 中两数之和（$i = 1, 2, 3, 4$）.

证明： 显然 $n \geq 16$ 时，才会有相应 A 存在.

任取 $B \subset A$，$|B| = 2[\sqrt{n}]$，令 $C = A - B$ 为 B 在 A 中的补集. 考虑集合 $B \times C$，及 $B \times C$ 上的函数

$$f(b, c) = b + 2c, \quad b \in B, \ c \in C.$$

$|B \times C| > 2[\sqrt{n}] \cdot (4\sqrt{n} - 2[\sqrt{n}]) > 3n$，最后的不等式只需 $2[\sqrt{n}] > \sqrt{n}$ 即可，对 $n \geq 16$ 总成立.

f 的取值范围包含于 $\{3, 4, \ldots, 3n - 1\}$，至多 $3n - 3$ 个可能值.

根据抽屉原则，存在不同数对 $(b, c), (d, e) \in B \times C$，使得 $b + 2c = d + 2e$，显然 $b \neq d$（否则 $c = e$ 矛盾），根据 B, C 取法，$b \neq c, b \neq e, d \neq c, d \neq e$. 不妨设 $b > d$，则 $e > c$，$b - d = 2(e - c)$.

可以看出 $d + c < d + e < b + c < b + e$ 构成等差数列，满足题目条件. **（解题人：吴宇培）**

有没有人和你说过一句话，你学数学、数学竞赛的样子真的好帅，

没有？那现在，就在前一秒，我对你说了。

—来自最爱你的小数君

傻子俱乐部等着你来！（微信公众号，数学竞赛的那些事儿，shuxuejingsai001）