

妙用特殊值 巧解高考题*

北京市第一〇一中学怀柔分校 (101407) 李加军

山东省栖霞市观里中学 (265314) 徐艳华

近两年各地高考数学试题各有千秋,从不同角度考查了学生数学的“四基”、“三会”和六大数学核心素养,给人以赏心悦目的感受.纵观各套试卷,如果抓住一般与特殊的关系,灵活寻求特值,充分发挥数学运算核心素养,有些试题可以迎刃而解,达到以四两拨千斤的效果.

例 1 (2020 年北京) 已知函数 $f(x) = 2^x - x - 1$, 则不等式 $f(x) > 0$ 的解集是().

- A. $(-1, 1)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C. $(0, 1)$ D. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

分析: 本题旨在借助函数 $y = 2^x$ 和 $y = x + 1$ 的图象, 观察图象可得结果, 对有些同学会有点难度. 但是观察选择项, 只需验证特殊值即可.

解: 因为 $f(x) = 2^x - x - 1$, 设 $f(x) > 0$ 的解集为 M , 因为 $f(-1) = \frac{1}{2} > 0$, 所以 $-1 \in M$, 排除 A, B, C, 故选 D.

例 2 (2021 年全国新高考) 若过点 (a, b) 可以作曲线 $y = e^x$ 的两条切线, 则().

- A. $e^b < a$ B. $e^a < b$ C. $0 < a < e^b$ D. $0 < b < e^a$

分析: 结合曲线 $y = e^x$ 的图象直观即可判定点 (a, b) 在曲线下和 x 轴上方时才可以作出两条切线, 再结合选项列举两组特值排除 a, b 所不满足的关系, 由此确定正确选项.

解: 画出函数 $y = e^x$ 的图象, 如图 1 所示, 根据直观即可判定点 (a, b) 在曲线下和 x 轴上方时才可以作出两条切线.

曲线 $y = e^x$ 在其上任一点 $P(t, e^t)$ 的切线方程为 $y - e^t = e^t(x - t)$, 即 $y = e^t x + (1 - t)e^t$, 选点 (a, b) 为 $(2, 1)$, 则 $1 = e^t + (2 - t)e^t$, 令 $f(t) = (3 - t)e^t - 1$, 则 $f'(t) = (2 - t)e^t$. 当 $t < 2$ 时, $f'(t) > 0$, 此时函数 $f(t)$ 单调递增, 当 $t > 2$ 时, $f'(t) < 0$, 此时函数 $f(t)$ 单调

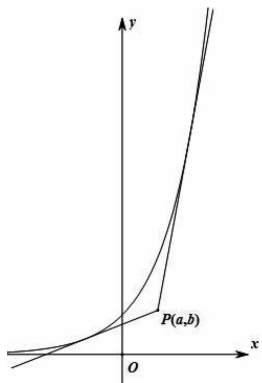


图 1

递减, 又 $f(2) = e^2 - 1 > 0$, $f(-3) = \frac{6}{e^3} - 1 < 0$, 所以 $f(3) = -1 < 0$, 此时存在两条切线, 排除 A, B; 同理选点 (a, b) 为 $(3, 1)$, 可以排除 C, 故选 D.

例 3 (2021 年全国乙) 设 $a \neq 0$, 若 $x = a$ 为函数 $f(x) = a(x - a)^2(x - b)$ 的极大值点, 则().

- A. $a < b$ B. $a > b$ C. $ab < a^2$ D. $ab > a^2$

分析: 先考虑函数的零点情况, 注意零点左右附近函数值是否变号, 结合极大值点的性质, 选取两组特值进行验证, 排除 a, b 所不满足的关系, 由此确定正确选项.

解: 若 $a = b$, 则 $f(x) = a(x - a)^3$ 为单调函数, 无极值点, 不符合题意. $\therefore f(x)$ 有 $x = a$ 和 $x = b$ 两个不同零点, 且在 $x = a$ 左右附近是不变号, 在 $x = b$ 左右附近是变号的. 依题意, $x = a$ 为函数 $f(x) = a(x - a)^2(x - b)$ 的极大值点, $\therefore$ 在 $x = a$ 左右附近都是小于零的. 易知取 $a = -1, b = -2$ 和 $a = 1, b = 2$ 符合题意, 所以排除 A, B, C, 故答案选 D.

例 4 (2021 年浙江) 已知 α, β, γ 是互不相同的锐角, 则在 $\sin\alpha\cos\beta, \sin\beta\cos\gamma, \sin\gamma\cos\alpha$ 三个值中, 大于 $\frac{1}{2}$ 的个数的最大值是().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

分析: 利用基本不等式或排序不等式得 $\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha \leq \frac{3}{2}$, 从而可判断三个代数式不可能均大于 $\frac{1}{2}$, 再结合特例可得三式中大于 $\frac{1}{2}$ 个数的最大值.

解: 由基本不等式有 $\sin\alpha\cos\beta \leq \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\beta}{2}$, $\sin\beta\cos\gamma \leq \frac{\sin^2\beta + \cos^2\gamma}{2}$, $\sin\gamma\cos\alpha \leq \frac{\sin^2\gamma + \cos^2\alpha}{2}$, 故 $\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha \leq \frac{3}{2}$, 故 $\sin\alpha\cos\beta, \sin\beta\cos\gamma, \sin\gamma\cos\alpha$ 不可能均大于 $\frac{1}{2}$. 取 $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{\pi}{4}$, 则 $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, $\sin\beta\cos\gamma = \frac{\sqrt{6}}{4} > \frac{1}{2}$,

* 本文系北京市怀柔区重点课题《促进中学生数学核心素养提升的校本课程开发的实践研究》(编号:202002)阶段性研究成果

$\sin\gamma\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{4} > \frac{1}{2}$, 故三式中大于 $\frac{1}{2}$ 的个数的最大值为 2, 故选 C.

例 5 (2020 年山东) 若定义在 R 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 且 $f(2) = 0$, 则满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是().

- A. $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$ B. $[-3, -1] \cup [0, 1]$
C. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$ D. $[-1, 0] \cup [1, 3]$

分析: 此题首先根据函数奇偶性与单调性, 得到函数 $f(x)$ 在相应区间上的符号, 再根据两个数的乘积大于等于零, 分类转化为对应自变量不等式, 最后求并集得结果. 但这一过程很多同学可能会不太清晰, 如果借助特值, 结果马上水落石出.

解: 记 $g(x) = xf(x-1)$, 且 $xf(x-1) \geq 0$ 即 $g(x) \geq 0$ 的解集为 M , 首先因为 $g(2) = 2f(1) = -2f(-1) > -2f(-2) = 2f(2) = 0$, 所以 $2 \in M$, 排除 A, B, 其次 $g(4) = 4f(3) = -4f(-3) < -4f(-2) = 4f(2) = 0$, 所以 $4 \notin M$, 排除 C, 故选 D.

例 6 (2020 年新课标 I) 若 $2^a + \log_2 a = 4^b + 2\log_4 b$, 则().

- A. $a > 2b$ B. $a < 2b$ C. $a > b^2$ D. $a < b^2$

分析: 本题主要考查函数与方程的综合应用, 涉及到构造函数, 利用函数的单调性比较大小, 对学生有些难度. 如果适当选取几个特值进行验证, 可以顺利解决此题.

解: 因为 $f(x) = 2^x + \log_2 x$ 与 $g(x) = 4^x + 2\log_4 x$ 在 $(0, +\infty)$ 内均为增函数, 当取 $a = 1$ 时, $f(1) = 2$, 会估算出 $\frac{1}{2} < b < 1$, 故排除 A, D, 又当取 $a = 4$ 时, $f(4) = 18$, 会估算出 $2 < b < 3$, 故排除 C, 故选 B.

例 7 (2020 年全国 II 理) 设函数 $f(x) = \ln|2x + 1| - \ln|2x - 1|$, 则 $f(x)$ ().

- A. 是偶函数, 且在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 单调递增
B. 是奇函数, 且在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 单调递减
C. 是偶函数, 且在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 单调递增
D. 是奇函数, 且在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 单调递减

分析: 本题考查函数的奇偶性以及复合函数的单调性, 如果学生的运算化简能力稍弱, 可能会出现错误判断. 借助特值运算, 可以降低试题的难度, 轻松过关.

解: 由 $f(-1) = \ln|-1| - \ln|-3| = -\ln 3$ 及 $f(1) = \ln|3| - \ln|1| = \ln 3$, 得 $f(-1) = -f(1)$, 排除 A, C; 由 $f(0) = \ln|1| - \ln|-1| = 0$, 及 $f(\frac{1}{4}) = \ln|\frac{3}{2}| - \ln|-\frac{1}{2}| = \ln 3 > 0$, 排除 B, 故选 D.

例 8 (2020 年新课标 II 文) 设函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$, 则 $f(x)$ ().

- A. 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递增
B. 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递减
C. 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递增
D. 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递减

分析: 本题考查函数的奇偶性以及单调性, 难度不大, 但借助特值判断, 可以提高准确率.

解: 由 $f(-2) = -8 - (-\frac{1}{8}) = -\frac{63}{8}$ 及 $f(2) = 8 - \frac{1}{8} = \frac{63}{8}$, 得 $f(-2) = -f(2)$, 排除 C, D; 由 $f(1) = 1 - 1 = 0$, 及 $f(2) = 8 - \frac{1}{8} = \frac{63}{8}$, 排除 B, 故选 A.

例 9 (2020 年新课标 II) 若 $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$, 则().

- A. $\ln(y-x+1) > 0$ B. $\ln(y-x+1) < 0$
C. $\ln|x-y| > 0$ D. $\ln|x-y| < 0$

分析: 本题考查对数式的大小的判断问题, 解题关键是将不等式变为 $2^x - 3^{-x} < 2^y - 3^{-y}$, 通过构造函数 $f(t) = 2^t - 3^{-t}$ 的方式, 利用函数的单调性得到 x, y 的大小关系, 考查了转化与化归的数学思想, 但对许多同学来说并不简单. 如果通过验证特值或许就顺手得到结果.

解: 易知取 $x = 1, y = 2$ 符合条件, 此时排除 B, C, D, 故选 A.

例 10 (2020 年天津) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x|$ ($k \in \mathbf{R}$) 恰有 4 个零点, 则的取值范围是().

- A. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$
B. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, 2\sqrt{2})$
C. $(-\infty, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$
D. $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

分析: 函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x|$ ($k \in \mathbf{R}$) 恰有 4 个零点的问题可转化为 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 与函数 $h(x) = |kx^2 - 2x|$ ($k \in \mathbf{R}$) 有 4 个交点的问题, 可以画图分类讨论, 复杂程度较高. 但结合选择项用特值检验会有意想不到的结果.

解: 取 $k = 1$, 则 $h(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 0 \text{ 或 } x > 2 \\ 2x - x^2, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 当 $x < 0$ 时, 则 $x^2 - 2x = -x$, 无解, 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, 由 $2x - x^2 = x^3$ 得 $x = 0$ 与 $x = 1$ 两个解, 当 $x > 2$ 时, 由 $x^2 - 2x = x^3$ 得 x 无解, 排除

B, C ; 取 $k = -\frac{1}{2}$, 则 $h(x) = \left| \frac{1}{2}x^2 + 2x \right| =$
 $\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x, x < -4 \text{ 或 } x > 0, \\ -\frac{1}{2}x^2 - 2x, -4 \leq x \leq 0. \end{cases}$ 当 $x < -4$ 时, 由 $\frac{1}{2}x^2 +$

$2x = -x$ 得 $x = -6$ 一个解, 当 $-4 \leq x \leq 0$ 时, 由 $-\frac{1}{2}x^2 - 2x = -x$ 得 $x = -2$ 与 $x = 0$ 两个解, 当 $x > 0$ 时, 由 $\frac{1}{2}x^2 + 2x = x^3$ 得 $x = \frac{1 + \sqrt{33}}{4}$ 一个解, 符合条件, 排除 A, 故选 D.

例 11 (2020 新课标 II 理) 若 α 为第四象限角, 则().

A. $\cos 2\alpha > 0$ B. $\cos 2\alpha < 0$ C. $\sin 2\alpha > 0$ D. $\sin 2\alpha < 0$

分析: 由 α 为第四象限角推出 2α 的范围, 然后判断 2α 的正、余弦值的正负. 选两个特值可以快速得出结论.

解: 取 $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, 则 $\cos 2\alpha = \cos(-\frac{\pi}{3}) > 0$, $\sin 2\alpha = \sin(-\frac{\pi}{3}) < 0$; 取 $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$, 则 $\cos 2\alpha = \cos(-\frac{4\pi}{3}) < 0$, $\sin 2\alpha = \sin(-\frac{4\pi}{3}) < 0$, 故选 D.

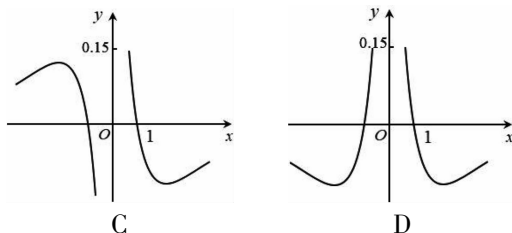
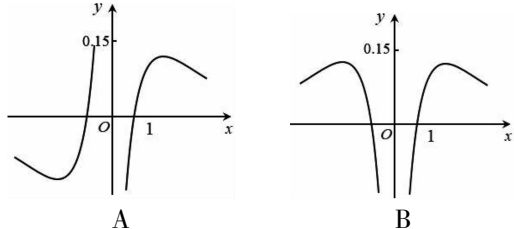
例 12 (2020 年新课标 I 文) 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x - 4 < 0\}$, $B = \{-4, 1, 3, 5\}$, 则 $A \cap B =$ ().

A. $\{-4, 1\}$ B. $\{1, 5\}$ C. $\{3, 5\}$ D. $\{1, 3\}$

分析: 首先解一元二次不等式求得集合 A, 之后利用交集中元素的特征求得 $A \cap B$, 得到结果. 试题虽然简单, 但结合选择项, 选特值计算更快更准.

解: 设 $f(x) = x^2 - 3x - 4$, 易验证 $f(1) = -6 < 0$ 及 $f(3) = -4 < 0$ 得 $1 \in A \cap B$ 且 $3 \in A \cap B$, 故选 D.

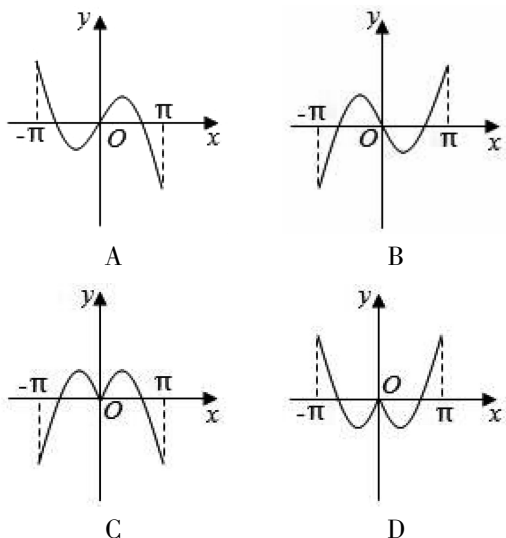
例 13 (2021 年天津) 函数 $y = \frac{\ln|x|}{x^2 + 2}$ 的图像大致为().



分析: 先判断函数的奇偶性, 再判断函数值的特点. 因此直接取几个特殊值即可.

解: 设 $y = f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2 + 2}$, 则由 $f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = \frac{-2\ln 2}{5} < 0$ 排除 A, C, D. 故选 B.

例 4 (2020 年浙江) 函数 $y = x \cos x + \sin x$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的图像可能是().



分析: 先判断函数的奇偶性, 再判断函数值的特点. 因此直接取几个特殊值即可.

解: 令 $y = f(x) = x \cos x + \sin x$, $f(\pi) = \pi \cos \pi + \sin \pi = -\pi < 0$, 且 $f(-\pi) = -\pi \cos(-\pi) + \sin(-\pi) = \pi$, 排除 B, C, D, 故选 A.

高考试题的解答固然需要扎实的基本知识, 但辅之以灵活的方法将使我们如虎添翼, 更加简便快捷地解决一些问题.