着力一题多解　引领学生思考

——以一道高三质检题为例

蔡海涛　(福建省莆田第二中学　351131)

本文以一道高三质检题为例,提供了多种解题思路,兼顾了解题的通性通法和特殊解答技巧,引领学生进行解题反思,归纳并提炼解题思想和方法,同时在解题教学层面进行了深入思考,旨在培养学生的数学核心素养.

1　试题呈现

(2020 年莆田市高三第三次质检 · 理 21)设函数 $f(x)=x\ln x$, $g(x)=ae^x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线也与曲线 $y=g(x)$ 相切,求 a 的值.

(2)设函数 $G(x)=f(x)-g(x)$ 存在两个极值点.① 求 a 的取值范围;② 当 $ae^2\geqslant 2$ 时,证明:$G(x)<0$.

2　解法探究

(1)$a=e^{-2}$.(2)①a 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ (过程略).本文主要探究第(2)② 问的解法.

证法 1　设 $F(x)=\dfrac{G(x)}{x}=\ln x-\dfrac{ae^x}{x}$,则 $F'(x)=\dfrac{x-a(x-1)e^x}{x^2}$.

当 $0<x\leqslant 1$ 时,因为 $a\geqslant\dfrac{2}{e^2}$,所以 $F'(x)>0$,因此 $F(x)$ 在区间(0,1)上单调递增,于是有 $F(x)\leqslant F(1)=-ae<0$.

当 $x>1$ 时,$F'(x)=-\dfrac{a(x-1)}{x^2}\cdot\left[e^x-\dfrac{x}{a(x-1)}\right]$,令 $H(x)=e^x-\dfrac{x}{a(x-1)}$,则 $H'(x)=e^x+\dfrac{1}{a(x-1)^2}>0$.因为 $a\geqslant\dfrac{2}{e^2}$,所以 $H(2)=\dfrac{ae^2-2}{a}\geqslant 0$.取 $m\in(1,2)$,且使 $\dfrac{m}{a(m-1)}>e^2$,即 $1<m<\dfrac{ae^2}{ae^2-1}$,则 $H(m)=e^m-\dfrac{m}{a(m-1)}<e^2-e^2=0$.

因为 $H(m)\cdot H(2)\leqslant 0$,所以 $H(x)$ 存在唯一零点 $x_0\in(1,2)$,故 $F(x)$ 有唯一的极大值点 $x_0\in(1,2)$.

由 $H(x_0)=0$,可得 $e^{x_0}=\dfrac{x_0}{a(x_0-1)}$,故 $F(x_0)=\ln x_0-\dfrac{1}{x_0-1}$, $x_0\in(1,2)$.

因为 $F'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{1}{(x_0-1)^2}>0$,所以 $F(x_0)$ 在区间(1,2)内单调递增,所以 $F(x_0)<F(2)=\ln 2-\dfrac{ae^2}{2}\leqslant\ln 2-1<0$.

综上,当 $ae^2\geqslant 2$ 时,均有 $\dfrac{G(x)}{x}<0$,即 $G(x)<0$.

评注　这个解法是官方提供的唯一参考答案.此法的思路为求 $G(x)$ 的最值,故考虑对其进行求导,发现导函数较为复杂,所以将其转化为求函数 $F(x)=\dfrac{G(x)}{x}=\ln x-\dfrac{ae^x}{x}$ 的符号,由此简化了下一步的求导运算,突破了本题的第一个难点.继而分析 $F'(x)$ 的符号,当 $0<x\leqslant 1$ 时,易知 $F'(x)>0$,从而得 $F(x)<0$;当 $x>1$ 时,对 $F(x)$ 求导,得 $F'(x)=-\dfrac{a(x-1)}{x^2}\cdot\left[e^x-\dfrac{x}{a(x-1)}\right]$,然后研究函数 $H(x)=e^x-\dfrac{x}{a(x-1)}$,得 $H(x)$ 在区间(1,2)上存在唯一隐零点 x_0,再由 $F(x_0)$ 的单调性得 $F(x_0)<0$,由此突破了本题的第二个难点,问题得证.证法 1 的基本思路为 $G(x)<0\Leftarrow G(x)_{\max}<0\Leftarrow F(x)_{\max}<0$,思路直接,但当 $x>1$ 时的讨论比较复杂.

证法 2　由 $ae^2\geqslant 2$,得 $a\geqslant\dfrac{2}{e^2}$.欲证 $G(x)=x\ln x-ae^x<0$,即证 $a>\dfrac{x\ln x}{e^x}$.

当 $0<x<1$ 时,$\dfrac{x\ln x}{e^x}<0$,成立.

当 $x\geqslant 1$ 时,设 $h(x)=\dfrac{x\ln x}{e^x}$,则

$h'(x)=\dfrac{\ln x+1-x\ln x}{e^x}$.

设 $u(x)=\ln x+1-x\ln x(x\geqslant 1)$，则 $u'(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x-1$.

又 $u'(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递减，故 $u'(x)\leqslant u'(1)=0$，即 $u(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为减函数.

又 $u(2)=1-\ln 2>0$，$u(3)=1-2\ln 3<0$，故存在 $x_0\in(2,3)$，使得 $h'(x_0)=0$，即 $\ln x_0+1-x_0\ln x_0=0$ (*).

于是当 $1<x<x_0$ 时，$h'(x_0)>0$，$h(x)$ 为增函数；当 $x>x_0$ 时，$h'(x_0)<0$，$h(x)$ 为减函数.

结合(*)式可得 $h(x)\leqslant h(x_0)=\dfrac{x_0\ln x_0}{e^{x_0}}=\dfrac{\ln x_0+1}{e^{x_0}}<\dfrac{x_0}{e^{x_0}}<\dfrac{2}{e^2}$.($\ln x_0<x_0-1$，且 $y=\dfrac{x}{e^x}$ 在 $(2,3)$ 上为减函数.)

综上，得 $a>\dfrac{x\ln x}{e^x}$，故原命题成立.

评注 此法的思路是通过分离变量转化为要证 $a>\dfrac{x\ln x}{e^x}$，即证 $\dfrac{2}{e^2}>\left(\dfrac{x\ln x}{e^x}\right)_{\min}$，故对函数 $h(x)=\dfrac{x\ln x}{e^x}$ 求导，研究其单调性，得到 $h'(x)=0$ 的隐零点 x_0，进而得到 $h(x)_{\max}=h(x_0)$，再由 $h(x_0)<\dfrac{2}{e^2}$ 证之.证法2的基本思路类似证法1，都是转化求函数的最值，区别之处在于先对参数进行分离，使得运算简化.

证法3 要证原不等式成立，只需证 $x\ln x<ae^x$.因为 $ae^2\geqslant 2$，故只需证 $x\ln x<2e^{x-2}$，即证 $\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{2e^{x-2}}{x^2}$.令 $\varphi(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，易得 $\varphi(x)$ 在区间 $(0,e)$ 上单调递增，在区间 $(e,+\infty)$ 上单调递减，故 $\varphi(x)\leqslant\varphi(e)=\dfrac{1}{e}$.

令 $m(x)=\dfrac{2e^{x-2}}{x^2}$，则 $m'(x)=\dfrac{2e^{x-2}(x-2)}{x^3}$，则 $m(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减，在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增，故 $m(x)\geqslant m(2)=\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{e}\geqslant\varphi(x)$，即 $\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{2e^{x-2}}{x^2}$，得证.

评注 此法的思路是先利用 $ae^2\geqslant 2$，把问题转化为证明 $x\ln x<2e^{x-2}$，从而消去参数，突破了难点，继而进一步等价变形为 $\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{2e^{x-2}}{x^2}$，由 $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)_{\max}<\left(\dfrac{2e^{x-2}}{x^2}\right)_{\min}$ 证之.若将要证的不等式转化为 $\ln x-\dfrac{2e^{x-2}}{x}<0$，构造函数，则证明会比较复杂，所以把 $\ln x$ 与 e^x 分离在不等式两边进行处理，这种解法可谓“分而治之”.通常，对于形式比较复杂的函数，往往需要合理拆分与变形，一般转化为只含有一个“超越式”的函数进行处理.

证法4 同证法3，即证 $x\ln x<2e^{x-2}$，只需证 $\dfrac{2e^{x-2}}{x}>\ln x$.函数 $\varphi(x)=\dfrac{2e^{x-2}}{x}$ 在 $x=2$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$，易证 $\dfrac{2e^{x-2}}{x}\geqslant\dfrac{1}{2}x$，当且仅当 $x=2$ 时等号成立.易证得 $\dfrac{1}{2}x>\ln x$，故 $\dfrac{2e^{x-2}}{x}>\ln x$.

评注 函数 $\varphi(x)=\dfrac{2e^{x-2}}{x}$ 为凹函数，函数 $g(x)=\ln x$ 为凸函数，利用切线进行放缩转化得到证明.

3 变式拓展

变式1 已知函数 $f(x)=\dfrac{2\ln x+2}{e^x}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)证明：当 $x>0$ 时，都有 $f'(x)\ln(x+1)<\dfrac{2}{e^x}+\dfrac{2}{e^{x+2}}$.

解 (1)函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.(过程略)

(2)要证明 $f'(x)\ln(x+1)<\dfrac{2}{e^x}+\dfrac{2}{e^{x+2}}$，即证 $(1-x-x\ln x)\ln(x+1)<\left(1+\dfrac{1}{e^2}\right)x$.

令 $g(x)=1-x-x\ln x$，则 $g'(x)=-1-(\ln x+1)=-2-\ln x$.

当 $0<x<\dfrac{1}{e^2}$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>\dfrac{1}{e^2}$ 时，$g'(x)<0$，故函数 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e^2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{e^2},+\infty\right)$ 上单调递减，$g(x)\leqslant 1-\dfrac{1}{e^2}+\dfrac{2}{e^2}=1+\dfrac{1}{e^2}$，所以 $1-x-x\ln x\leqslant 1+\dfrac{1}{e^2}$.

又易证 $\ln(x+1)<x$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，故 $0<\ln(x+1)<x$，则 $(1-x-x\ln x)\cdot\ln(x+1)<\left(1+\frac{1}{e^2}\right)x$.

综上，当 $x>0$ 时，都有 $f'(x)\ln(x+1)<\frac{2}{e^x}+\frac{2}{e^{x+2}}$.

评注　对于含有 $\ln x$ 与 e^x 型的超越函数，具体解决时须根据这两类函数的特点，挖掘结构特征，灵活变形，脑中有“形”，特别注意重要不等式 $\ln x\leqslant x-1\Leftrightarrow e^x\geqslant x+1$ 的合理代换.

变式 2　若关于 x 的不等式 $e^{2x}-a\ln x\geqslant\frac{1}{2}a$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

解法 1　由题意可得 $2e^{2x}\geqslant a(2\ln x+1)$，即函数 $f(x)=2e^{2x}$ 的图象在函数 $g(x)=a(2\ln x+1)$ 图象的上方. 显然当 $a<0$ 时，不合题意；当 $a=0$ 时，符合题意；当 $a>0$ 时，临界值在两曲线相切时取得，设切点横坐标为 t，则有 $\begin{cases}f(t)=g(t),\\f'(t)=g'(t),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2e^{2t}=a(2\ln t+1),\\4e^{2t}=\frac{2a}{t},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}t=1,\\a=2e^2,\end{cases}$ 故 a 的取值范围为 $[0,2e^2]$.

解法 2　由题意得 $e^{2x}\geqslant a\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)$，即 $e^{2x}\geqslant a\ln(\sqrt{e}x)$，所以 $f(x)=e^{2x}-a\ln(\sqrt{e}x)\geqslant 0$ 恒成立. 显然当 $a<0$ 时，不合题意；当 $a=0$ 时，符合题意；当 $a>0$ 时，$e^{2x}\geqslant\frac{a}{2}\ln(\sqrt{e}x)^2$，故 $\frac{a}{2}\leqslant\frac{e^{2x}}{\ln(ex^2)}$ 恒成立. 而 $e^{2x}=(e^x)^2\geqslant(ex)^2$，$\ln(ex^2)\leqslant\frac{1}{e}\cdot ex^2=x^2$，当且仅当 $x=1$ 时以上等号成立，故 $\left(\frac{e^{2x}}{\ln(ex^2)}\right)_{\min}=\frac{(ex)^2}{x^2}=e^2$，从而 $\frac{a}{2}\leqslant e^2$，即 $0<a\leqslant 2e^2$，故 a 的取值范围为 $[0,2e^2]$.

评注　解法 1 是从函数的图象入手，函数 $f(x)=2e^{2x}$ 是凹函数，$g(x)=a(2\ln x+1)$ 是凸函数，通过两函数的公切线来进行转化；解法 2 对参数进行分离，转化为求 $\left(\frac{e^{2x}}{\ln(ex^2)}\right)_{\min}$，再利用不等式“$e^x\geqslant ex$”及“$\ln x\leqslant\frac{x}{e}$”进行放缩得到最小值. 两种解法的过程不同，但基本思路相同，均是利用切线放缩对凹函数与凸函数进行转化.

4　教学启示

(1)对解题教学的思考

在解题教学中，教师常常采用一题多解，让学生从多种思维角度来思考问题，既要重视通性通法又要关注特法巧解，解后引导学生对解题方法进行归纳，在数学思想上进行引领. 指数、对数组合型的函数不等式问题，常用的解题方法有三种：一是指数、对数分离并向易于求最值的常用函数转化；二是利用放缩消掉指数函数或对数函数之一，再进行处理；三是隐零点法. 对于具体问题，可根据函数特征具体分析，选择合适的方法求解.

解题教学中还可常常对问题进行变式，让学生通过“变中发现不变”来学习抽象化并通过“以不变应万变”来学习公理化，以此来解决数学教学中的核心问题——“抽象化”和“公理化”. 基于突出数学本质的解题教学，不应局限在解题方法的展示，更应引导学生在课内、课外注重知识背后的数学思想、方法的贯通，注重形、数之间的结合，引导学生进行学习内容逻辑线索的梳理，强化在数学实践活动中综合运用数学知识的能力，从不同角度思考问题，由此建立起知识体系，从而能以“一览众山小”的姿态来看待数学问题.

(2)精选例题，聚焦高考

教师讲解模拟卷的典型试题，应聚焦高考试题，进行高考试题对点链接，引导学生学会归纳试题的共性，学会应对试题的创新变化，看破迷雾，提升抓住问题本质的能力. 高考压轴题都具有一定的创新性，解题教学中教师应努力培养学生的发散思维，拓宽学生的视角. 只有这样才能让学生做到“以不变应万变”，笑傲考场.

(3)引领学生深度思考

解题教学中教师应引领学生进行深度思考，引导学生从不同视角、不同方向进行观察、类比、联想，引领学生思考一题多解、一题多变、多题一解、多解归一；思考答题难点是什么，为什么不会，这种解法能否推广；思考这道题还可以得到哪些结论，条件结论能否互换. 通过思考，获取问题的内在联系，关注学习内容的有机整合. 注重知识学习的批判理解，着意学习过程的建构反思，重视学习的迁移运用和问题解决，从而领悟数学之美，提升核心素养.