从通性通法的角度谈谈“坐标法”及其应用

◇ 广东 杨 璐

“坐标法”是解析几何中最基本的思想和方法，涵盖两种转化，即“几何问题坐标化”和“坐标问题几何化”.具体讲，“几何问题坐标化”是根据曲线上动点的几何特征，通过建系得出曲线上动点坐标满足的方程；而“坐标问题几何化”是根据曲线方程代数结构的特殊性，提炼出曲线上动点坐标轨迹的特点，进而研究曲线的几何特征.

从通性通法的角度分析“坐标法”，可以得出其两种作用：首先“坐标法”是解决解析几何问题的基本方法，其次“坐标法”是“几何问题”和“代数问题”互化的中介.下面通过典型例题介绍“坐标法”及其应用.

1 几何问题坐标化

解析几何中的曲线方程都是通过“几何问题坐标化”得到的结果，在这里不再赘述.在解决一些有关的几何问题时，通过“坐标法”解决问题，有时能起到降低难度的作用.

例1 在$\triangle ABC$中，$BC=2\sqrt{6}$，$AB=2AC$，则$\triangle ABC$面积的最大值为________.

分析 虽然可以用“解三角形”的有关知识解答本题，但是难度较大.如果以BC所在的直线为x轴、BC的中垂线为y轴建立平面直角坐标系(如图1)，那么B，C两点为定点，点A为动点，进而将求$\triangle ABC$面积的最大值问题转化为求$\triangle ABC$中BC边上高的最大值问题，即动点A到x轴距离的最大值问题.

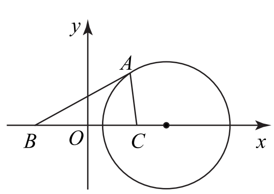

图1

解 设$A(x,y)$，$y\neq 0$，由图1可知$B(-\sqrt{6},0)$，$C(\sqrt{6},0)$，又$AB=2AC$，所以

$$\sqrt{(x+\sqrt{6})^2+y^2}=2\sqrt{(x-\sqrt{6})^2+y^2},$$

化简得$(x-\frac{5\sqrt{6}}{3})^2+y^2=(\frac{4\sqrt{6}}{3})^2$.当点$A$的坐标为$(\frac{5\sqrt{6}}{3},\pm\frac{4\sqrt{6}}{3})$时，$\triangle ABC$的面积取得最大值.故

$$S_{\max}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}=8.$$

点评 在解与三角形有关的问题中，把变量转化为相关的动点问题(即坐标化)，不但可以降低难度，还可以减少运算量.

变式 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$a=6$，$b+c=10$，则$\triangle ABC$面积的取值范围为________.

解析 本题可以转化为BC边上高的取值范围问题，而顶点A在一个椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1(y\neq 0)$上，进而可得$\triangle ABC$面积的取值范围是$(0,12]$，与其他方法相比，这种方法不但降低了题目难度，而且明显减少了运算量.

2 坐标问题几何化

“坐标问题几何化”具体讲就是：解析几何中提到的如何从曲线标准方程代数结构的特殊性发现曲线的几何特征.在一些坐标问题中，若观察到题设和解题目标中蕴含结构的特殊性，则可以运用“坐标问题几何化”来解决.

例2 已知过抛物线$C:y^2=2px(p>0)$焦点F的直线交C于A，B两点，且满足$\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$，则直线$AB$的斜率为________.

分析 可用坐标法或者倾斜角的正切值求斜率.

解 设$|AF|=4m$，$|FB|=m$，如图2、图3所示，根据抛物线的性质及$\mathrm{Rt}\triangle ABC$倾斜角的正切值可求出答案为$\pm\frac{4}{3}$.

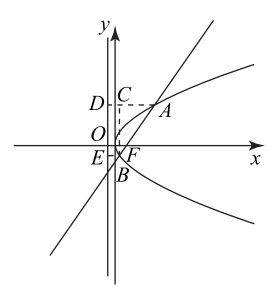

图2

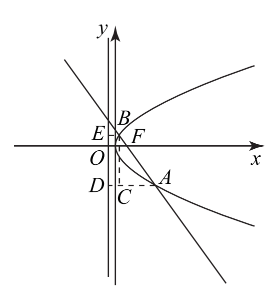

图3

点评 如果用“坐标法”解答本题，运算量比较大，不但费时，而且还容易出错.此外，由于思维的不严谨，很多考生容易忽略抛物线的对称性，只考虑一种情况.

例3 设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的右焦点为$F$，过$F$的直线$l$与椭圆$C$相交于$A$，$B$两点，直线$l$的倾斜角为$60°$，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，求椭圆$C$的离心

率 e.

分析 可以用"坐标法"解决本题,但运算量较大.如果将"坐标问题几何化",可以减少运算量.

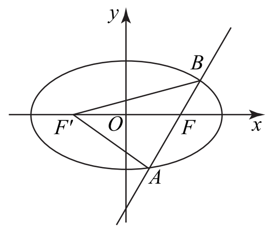

图 4

解 根据题设画出如图 4 所示的简图(F' 为左焦点).不妨设 $|AF|=2m$,$|FB|=m$,则 $|AF'|=2a-2m$,$|BF'|=2a-m$.又因为 $\angle F'FA=60°$,$\angle F'FB=120°$,所以由余弦定理可得

$$(2a-m)^2=m^2+4c^2+2cm, \quad ①$$

$$(2a-2m)^2=4m^2+4c^2-4cm. \quad ②$$

由①知

$$a^2-c^2=am+\frac{c}{2}m. \quad ③$$

由②知

$$a^2-c^2=2am-cm. \quad ④$$

由③④,得 $am+\frac{c}{2}m=2am-cm$,即 $\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$,故 $e=\frac{2}{3}$.

点评 本题是 2010 年高考数学试题(辽宁卷)的解析几何解答题的第(1)问,很多考生都用了"坐标法"求解,但在运算的过程中,由于运算量大,容易出现计算错误的现象.很多考生抱怨很容易找到解决此题的关键性思维,但在运算量上变相地增加了此题的难度.

3 几何问题先坐标化再代数化

例 4 已知△ABC 的面积等于 1,若 $BC=1$,则当△ABC 的三条高的乘积取得最大值时,$\sin A$ 的值为________.

我们先来看一下解法 1.

解法 1 设角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,三条高分别为 h_a,h_b,h_c,则 $a=1$.由于 $\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c=1$,故 $h_a=2$,$h_ah_bh_c=\frac{8}{bc}$,而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=1$,即 $\frac{1}{bc}=\frac{\sin A}{2}$,所以 $h_ah_bh_c=4\sin A$.故当 $\sin A$ 取得最大值时,△ABC 三条高的乘积取得最大值.如图 5 所示,作平行于 BC 且与 BC 距离为 2 的平行直线 l,作 BC 的垂直平分线 AD,交直线 l 于点 A.过 AD 上一点 O 作圆 O,使圆 O 经过 A,B,C 三个点.又由于圆外角小于圆周角,故此时 $\angle BAC$ 取得最大值,也即 $\sin\angle BAC$ 取得最大值.

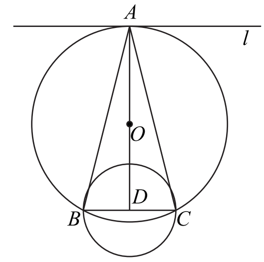

图 5

在△ABC 中,因为 $AB=AC=\frac{\sqrt{17}}{2}$,$BC=1$,所以由余弦定理得 $\cos\angle BAC=\frac{15}{17}$,所以 $\sin\angle BAC=\frac{8}{17}$,故当△$ABC$ 的三条高的乘积取得最大值时,$\sin A=\frac{8}{17}$.

点评 解法 1 利用三角形面积公式,将 $h_ah_bh_c$ 的最大值转化为 $\sin A$ 的最大值,但是在求 $\sin A$ 的最大值过程中利用了"△ABC 的外接圆圆 O 的外角小于圆周角时 $\angle BAC$ 取得最大值"的结论,思路新颖,是一个难点.很多学生可能一时想不到这个思路而就此卡住,此时我们便可以转换思路,用平面直角坐标系将顶点坐标化,从而将几何问题转化为代数问题.

解法 2 已知 $BC=1$,$S_{\triangle ABC}=1$,故 $h_a=2$.建立如图 6 所示平面直角坐标系,则点 $B(0,0)$,$C(1,0)$.设点 $A(m,2)$,$h_ah_bh_c=\frac{8}{abc}=\frac{8}{bc}=4\sin A$(同解法 1),则当 $bc=\sqrt{m^2+4}\sqrt{(m-1)^2+4}$ 取得最小值时,$h_ah_bh_c$ 取得最大值.

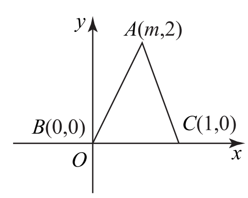

图 6

设 $g(m)=(m^2+4)[(m-1)^2+4]=m^4-2m^3+9m^2-8m+20$,则 $g'(m)=2(2m-1)(m^2-m+4)$,当 $m\in(-\infty,\frac{1}{2})$ 时,$g'(m)<0$,$g(m)$ 单调递减;当 $m\in(\frac{1}{2},+\infty)$ 时,$g'(m)>0$,$g(m)$ 单调递增,故当 $m=\frac{1}{2}$ 时,$g(m)$ 取得最小值,此时 $(bc)_{\min}=\frac{17}{4}$,$\sin A=\frac{2}{bc}=\frac{8}{17}$.

点评 解法 2 通过对三角形顶点坐标化,将几何问题转化成代数问题,再利用导数求最值,进而解决问题.几何问题虽复杂,但是通过坐标化后仍然

是一个单变量的代数问题.

4 代数问题先坐标化再几何化

例 5 若 $b>0$,则 $\sqrt{(a-2\sqrt{b})^2+(\ln a-b)^2}+b$ 的最小值是________.

分析 本题是一道双变量求最值的问题.由目标式 $\sqrt{(a-2\sqrt{b})^2+(\ln a-b)^2}+b$ 的结构,可联想到建立平面直角坐标系,将 $\sqrt{(a-2\sqrt{b})^2+(\ln a-b)^2}$ 看作 $P(a,\ln a)$,$Q(2\sqrt{b},b)$ 两点间的距离,而 b 可看作 $Q(2\sqrt{b},b)$,$H(2\sqrt{b},0)$ 两点间的距离,问题转化为求 $|PQ|+|QH|$ 的最小值.P 是 $y=\ln x$ 上的点,对于点 Q,在坐标系中存在 $F(0,1)$,$G(2\sqrt{b},-1)$ 两点,使得 $|QF|=|QG|=|QH|+1$,可联想到:以 $F(0,1)$ 为焦点、$y=-1$ 为准线的抛物线 $x^2=4y$,即问题最终为求抛物线 $x^2=4y$ 上一点到定点 $F(0,1)$ 与 $y=\ln x$ 上一点的距离之和的最小值,结合抛物线、函数图象及利用导数求最小值.

解 由 $T=\sqrt{(a-2\sqrt{b})^2+(\ln a-b)^2}+b$,记点 $P(a,\ln a)$,$Q(2\sqrt{b},b)$,$H(2\sqrt{b},0)$,$F(0,1)$,$G(2\sqrt{b},-1)$,则 $T=|PQ|+|QH|=|PQ|+|QG|-1=|PQ|+|QF|-1$,即原问题转化为抛物线 $x^2=4y$ 上的点 Q 到定点 $F(0,1)$ 与 $y=\ln x$ 上的点 P 的距离之和的最小值,$|PQ|+|QF|-1\geqslant|PF|-1$,当且仅当 P,Q,F 共线时,等号成立.

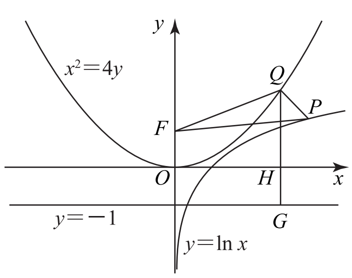

图 7

令 $f(a)=|PF|^2=a^2+(\ln a-1)^2$,则 $f'(a)=\frac{2}{a}(a^2+\ln a-1)$,且 $a>0$,由于 $y=a^2+\ln a-1$ 单调递增,则 $a=1$ 是 $f'(a)$ 唯一零点,即有 $f(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,则 $f(a)\geqslant f(1)=2$,即 $|PF|$ 的最小值为 $\sqrt{2}$,则 $T\geqslant|PF|-1\geqslant\sqrt{2}-1$,故最小值为 $\sqrt{2}-1$.

点评 本题以平面直角坐标系的坐标为中介,将代数问题转化为几何问题,考查了抛物线的性质、两点间距离公式、数形结合、应用导数研究函数的最值.类似地,将以上方法迁移可解决其他多变量的代数问题.

例 6 若 $\ln x_1-x_1-y_1+2=0$,$x_2+2y_2-4-2\ln 2=0$,则 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ 的最小值为________,此时 $x_2=$________.

分析 本题与例 5 类似,由目标式的形式 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ 可联想到建立平面直角坐标系.设点 $A(x_1,y_1)$,(x_2,y_2),点 A 在函数 $y=\ln x-x+2$ 上,点 B 在直线 $x+2y-4-2\ln 2=0$ 上,$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ 为 A,B 两点间距离的平方,故所求问题转化为函数 $y=\ln x-x+2$ 上的点到直线 $x+2y-4-2\ln 2=0$ 的距离的平方最小,结合数形结合思想,即可求出 $|AB|^2$ 的最小值.

解 设点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,点 A 在 $y=\ln x-x+2$ 上,点 B 在直线 $x+2y-4-2\ln 2=0$ 上,求 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ 的最小值,可转化为函数 $y=\ln x-x+2$ 上的点与直线 $x+2y-4-2\ln 2=0$ 上的点的距离的最小值的平方.由 $y=\ln x-x+2$,可得 $y'=\frac{1}{x}-1$.与直线 $x+2y-4-2\ln 2=0$ 平行的直线的斜率为 $-\frac{1}{2}$,令 $\frac{1}{x}-1=-\frac{1}{2}$,得 $x=2$,所以切点坐标为 $Q(2,\ln 2)$,点 Q 到直线 $x+2y-4-2\ln 2=0$ 的距离为 $d=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,即 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ 的最小值为 $\frac{4}{5}$.过点 Q 且与直线 $x+2y-4-2\ln 2=0$ 垂直的直线为 $2x-y-4+\ln 2=0$,由 $\begin{cases}x+2y-4-2\ln 2=0,\\2x-y-4+\ln 2=0,\end{cases}$ 得 $x_2=\frac{12}{5}$.

点评 根据坐标的二元性,很多代数问题中的二元问题可先转化为坐标问题,再转化为几何问题.运用这种通性通法解决问题的关键在于观察代数结构的特殊性.例如,含“平方结构”可转化为距离问题、含“绝对值结构”可转化为点到直线的距离问题、含“分式结构”可转化为斜率问题等.

数形结合是高中数学的重要思想,如何有效地将“数”与“形”结合起来通常是一个难点,“坐标法”作为数形结合的中介,有广泛的应用.在求解一些问题时,若没有解题思路,则可以考虑利用坐标系实现几何问题和代数问题互化.

(本文系广州教育学会科研课题“高中数学通性通法教学实践研究”(课题编号:KTLX1201930273)的阶段性成果.)

(作者单位:广东省广州市白云中学)