则 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})\cdot(\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n})=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{a_{n+1}}(\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n})$,

·· 4 分

因此 $\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{a_{n+1}}$,——②

①+②得 $\sqrt{S_{n+1}}=\frac{2}{3}\sqrt{3a_{n+1}}$, $S_{n+1}=\frac{4}{3}a_{n+1}=\frac{4}{3}(S_{n+1}-S_n)$,

从而 $S_{n+1}=4S_n$,又 $S_1=a_1=1$,可得 $S_n=4^{n-1}$, ······························· 6 分

$a_n=S_n-S_{n-1}=3\cdot4^{n-2}$, $n\geqslant2$,

综上可得 $a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 3\cdot4^{n-2}, & n\geqslant2,\end{cases}$ $n\in\mathbf{N}^*$; ······························· 8 分

(3) 若存在三个不同的数列$\{a_n\}$为"λ—3"数列,

则 $S_{n+1}^{\frac{1}{3}}-S_n^{\frac{1}{3}}=\lambda a_{n+1}^{\frac{1}{3}}$,

则 $S_{n+1}-3S_{n+1}^{\frac{2}{3}}S_n^{\frac{1}{3}}+3S_{n+1}^{\frac{1}{3}}S_n^{\frac{2}{3}}-S_n=\lambda^3a_{n+1}=\lambda^3(S_{n+1}-S_n)$, ·························· 10 分

即 $(1-\lambda^3)S_{n+1}-3S_{n+1}^{\frac{2}{3}}S_n^{\frac{1}{3}}+3S_{n+1}^{\frac{1}{3}}S_n^{\frac{2}{3}}-(1-\lambda^3)S_n=0$,

由 $a_1=1$, $a_n\geqslant0$,且 $S_n>0$,令 $p_n=\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right)^{\frac{1}{3}}>0$,

则 $(1-\lambda^3)p_n^3-3p_n^2+3p_n-(1-\lambda^3)=0$,

$\lambda=1$ 时, $p_n=p_n^2$,

由 $p_n>0$,可得 $p_n=1$,则 $S_{n+1}=S_n$,

即 $a_{n+1}=0$,

此时$\{a_n\}$唯一,不存在三个不同的数列$\{a_n\}$为"λ—3"数列. ······························ 12 分

(五)"圆锥曲线"综合测试卷

1. A **解析**:由双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 得 $a=1$, $b=\sqrt{2}$,且双曲线焦点在 x 轴,

则双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$.

故选 A.

2. B **解析**:椭圆长轴的长为 6,即 $2a=6$,得 $a=3$,

因为两个焦点恰好将长轴三等分,

所以 $2c=\frac{1}{3}\times2a=2$,得 $c=1$,

因此, $b^2=a^2-c^2=9-1=8$,

再结合椭圆焦点在 x 轴上,

可得此椭圆方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

故选 B.

3. C **解析**:A 为抛物线 C:$y^2=2px(p>0)$上一点,点 A 到 C 的焦点的距离为 12,到 y 轴的距离为 9,因为抛物线上的点到焦点的距离和到准线的距离相等,故有 $9+\frac{p}{2}=12$,解得 $p=6$;故选 C.

4. C　**解析**:因为$\triangle F_2PF_1$是底角为30°的等腰三角形,

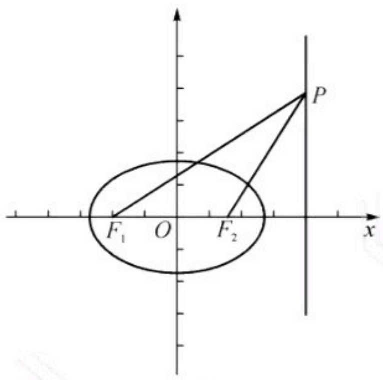
所以$|PF_2|=|F_2F_1|$,

因为P为直线$x=\dfrac{3a}{2}$上一点,

所以$2\left(\dfrac{3}{2}a-c\right)=2c$,

所以$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{4}$.

故选C.



(第**4**题)

5. B　**解析**:把$x=\dfrac{p}{2}$代入$y^2=2px$可得$y=\pm p$,不妨设M在第一象限,

则$M\left(\dfrac{p}{2},p\right)$,

又$A\left(-\dfrac{p}{2},0\right)$,所以直线$AM$的方程为$y=x+\dfrac{p}{2}$,即$x-y+\dfrac{p}{2}=0$,

所以原点O到直线AM的距离$d=\dfrac{\frac{p}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}p}{4}$,

因为以AF为直径的圆截直线AM所得的弦长为2,

所以$\dfrac{p^2}{4}=\dfrac{p^2}{8}+1$,解得$p=2\sqrt{2}$.

故选B.

6. B　**解析**:由题意可得双曲线的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{b}{a}x$,

将$x=a$代入可得$y=\pm b$,

即$D(a,b)$,$E(a,-b)$,

则$S_{\triangle ODE}=\dfrac{1}{2}a\times 2b=ab=8$,

所以$c^2=a^2+b^2\geqslant 2ab=16$,当且仅当$a=b=2\sqrt{2}$时取等号,

所以C的焦距的最小值为$2\times 4=8$,

故选B.

7. A　**解析**:由题意可得图象如图,

CD是双曲线的一条渐近线$y=\dfrac{b}{a}x$,

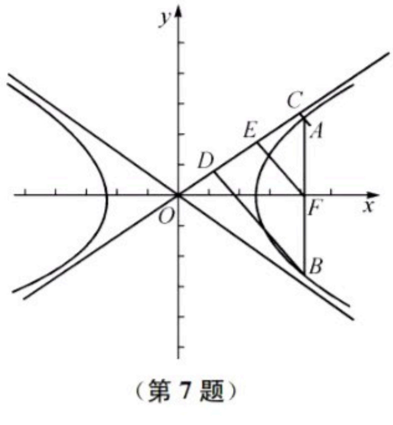
即$bx-ay=0$,$F(c,0)$,

且$AC\perp CD$于C,$BD\perp CD$于D,$FE\perp CD$于E,

则四边形$ACDB$是梯形,

因为F是AB的中点,所以$EF=\dfrac{d_1+d_2}{2}=3$,

即$EF=\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$,



(第**7**题)

所以$b=3$,双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为2,

可得$\frac{c}{a}=2$，即$\frac{a^2+b^2}{a^2}=4$，解得 $a=\sqrt{3}$.

则双曲线的方程为$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$.

故选 A.

8. C　**解析**：将 x 换成 $-x$ 方程不变，所以图形关于 y 轴对称，

当 $x=0$ 时，代入得 $y^2=1$，所以 $y=\pm1$，

即曲线经过 $(0,1)$，$(0,-1)$，

当 $x>0$ 时，方程变为 $y^2-xy+x^2-1=0$，

所以由 $\Delta=x^2-4(x^2-1)\geqslant0$，

解得 $x\in\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$，

所以 x 只能取整数 1，当 $x=1$ 时，$y^2-y=0$，

解得 $y=0$ 或 $y=1$，

即曲线经过 $(1,0)$，$(1,1)$，

根据对称性可得曲线还经过 $(-1,0)$，$(-1,1)$，

故曲线一共经过 6 个整点，故①正确，

当 $x>0$ 时，由 $x^2+y^2=1+xy$ 得 $x^2+y^2-1=xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$，当 $x=y$ 时取等号，

所以 $x^2+y^2\leqslant2$，所以 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\sqrt{2}$，

即曲线 C 上 y 轴右边的点到原点的距离不超过$\sqrt{2}$，

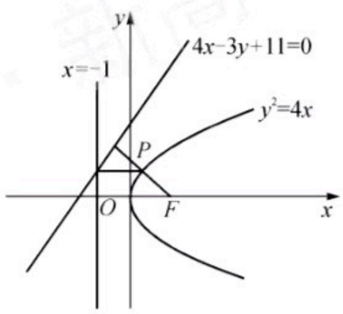
根据对称性可得：曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过$\sqrt{2}$，故②正确，

在 x 轴上方图形面积大于矩形面积$=1\times2=2$，x 轴下方的面积大于等腰直角三角形的面积$=\frac{1}{2}\times2\times1=1$，

因此曲线 C 所围成的“心形”区域的面积大于 $2+1=3$，故③错误，

故选 C.

9. ABD　**解析**：如右图，



（第 9 题）

抛物线上的点 P 到准线的距离等于到焦点 F 的距离，

所以过焦点 F 作直线 $4x-3y+11=0$ 的垂线，

则 F 到直线的距离为 d_1+d_2 的最小值，$F(1,0)$，

所以$(d_1+d_2)_{\min}=\frac{|4-0+11|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$，选项 ABD 均大于或等于 3.

故选 ABD.

10. AC　**解析**：当 $k<9$ 时，$22-k>9-k>0$，故曲线 C 表示焦点在 x 轴上的椭圆，A 正确，

若 $9<k<22$，$22-k>0>9-k$，曲线 C 表示焦点在 x 轴上的双曲线，故 B 错误，

当 $k>22$ 时，因为等号左边为负数，故所给方程没有轨迹，故 C 正确，

当 $k<22$ 且 $k\neq9$ 时，若 $9<k<22$ 时，曲线 C 表示焦点在 x 轴上的双曲线，故可得 $c^2=22-k+k-9=13$，

若 $k<9$ 时，故曲线 C 表示焦点在 x 轴上的椭圆，故可得 $c^2=22-k-(9-k)=13$，故 D

错误，

故选 AC.

11. CD **解析**:若动点 P 的轨迹为椭圆，则 k 要大于 A,B 两个定点间的距离，当 k 小于或等于 A,B 两个定点间的距离时动点 P 的轨迹不是椭圆，故 A 不正确；

函数 $f(x)=6x^2-5x+1$ 的两个零点分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$，不可分别作为椭圆和双曲线的离心率，故 B 错误；

双曲线 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{35}+y^2=1$ 有相同的焦点，焦点在 x 轴上，焦点坐标为 $(\pm\sqrt{34},0)$，故 C 正确；

不妨设抛物线为标准抛物线：$y^2=2px(p>0)$，即抛物线位于 y 轴的右侧，以 x 轴为对称轴，

设过焦点的弦为 PQ，PQ 的中点是 M，M 到准线的距离是 d.

而 P 到准线的距离 $d_1=|PF|$，Q 到准线的距离 $d_2=|QF|$.

又 M 到准线的距离 d 是梯形的中位线，故有 $d=\frac{|PF|+|QF|}{2}$，

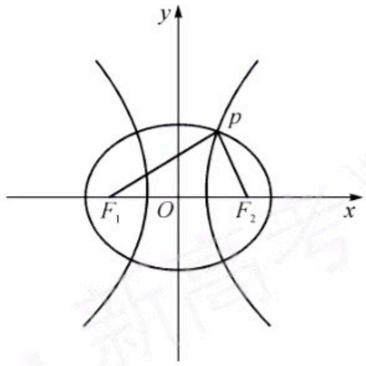
由抛物线的定义可得：$\frac{|PF|+|QF|}{2}=\frac{|PQ|}{2}=$半径，

所以圆心 M 到准线的距离等于半径，所以圆与准线是相切，故 D 正确；

故选 CD.

12. BD **解析**:如图所示，

设双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a_1{}^2}-\frac{y^2}{b_1{}^2}=1$，$a_1,b_1>0$，半焦距为 c.



(第 12 题)

因为椭圆 C_1 的上顶点为 M，且 $\angle F_1MF_2=\frac{2\pi}{3}$.

所以 $\angle MF_1F_2=\frac{\pi}{6}$，

所以 $e_1=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

不妨设点 P 在第一象限，设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$.

所以 $m+n=2a$，$m-n=2a_1$.

所以 $mn=\frac{(m+n)^2-(m-n)^2}{4}=a^2-a_1{}^2$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理可得：

$4c^2=m^2+n^2-2mn\cos\frac{\pi}{3}=(m+n)^2-3mn=4a^2-3(a^2-a_1{}^2)$.

所以 $4c^2=a^2+3a_1{}^2$.

两边同除以 c^2，得 $4=\frac{1}{e_1{}^2}+\frac{3}{e_2{}^2}$，

解得 $e_2=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

所以 $e_1\cdot e_2=\frac{3\sqrt{6}}{8}$，

$e_2^2-e_1^2=\dfrac{3}{8}$.

故选 BD.

13. 2　**解析**：因为抛物线 $y^2=2px(p>0)$上的动点 Q 到焦点的距离的最小值为 1，

所以$\dfrac{p}{2}=1$，所以 $p=2$，

故答案为 2.

14. 6　**解析**：抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点$F(2,0)$，M 是 C 上一点，FM 的延长线交 y 轴于点 N.

由 M 为 FN 的中点，可知 M 的横坐标为 1，所以$|FN|=2|FM|=2(1-(-2))=6$.

故答案为 6.

15. 6　**解析**：抛物线的焦点坐标为$\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$，准线方程为 $y=-\dfrac{p}{2}$，

准线方程与双曲线联立可得$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{\left(-\dfrac{p}{2}\right)^2}{3}=1$，

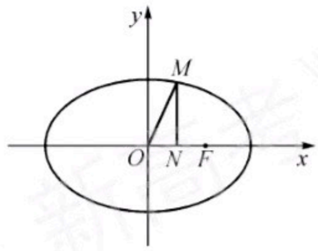
解得 $x=\pm\sqrt{3+\dfrac{p^2}{4}}$，

因为$\triangle ABF$ 为等边三角形，所以 $\sqrt{p^2+x^2}=2|x|$，即 $p^2=3x^2$，

即 $p^2=3\left(3+\dfrac{p^2}{4}\right)$，解得 $p=6$.

故答案为 6.

16. $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$；$\dfrac{2}{3}$　**解析**：不妨设 M 在 x 轴上方，则 $M\left(\dfrac{c}{2},y_0\right)(y_0>0)$，



（第 16 题）

代入椭圆方程可得$\dfrac{c^2}{4a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

解得 $y_0^2=\dfrac{4a^2-c^2}{4a^2}\cdot b^2=\dfrac{(4a^2-c^2)(a^2-c^2)}{4a^2}$，

再由 $\cos\angle MOF=\dfrac{3}{7}$可得 $\tan\angle MOF=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$，

所以$|MN|=\dfrac{\sqrt{10}}{3}c=\dfrac{\sqrt{10}}{3}\sqrt{a^2-b^2}$，

故 $y_0^2=\dfrac{10}{9}c^2$，

即$\dfrac{(4a^2-c^2)(a^2-c^2)}{4a^2}=\dfrac{10}{9}c^2$，

整理可得 $36a^4-85a^2c^2+9c^4=0$，

同除以 a^4 可得 $9e^4-85e^2+36=0$，

解得 $e^2=\dfrac{4}{9}$，或 $e^2=9$，

结合 $e\in(0,1)$可得 $e=\dfrac{2}{3}$.

17. 解：由 $P(x,y)$，可知 $Q(-x,y)$.

设 $A(a,0)$，$B(0,b)$，其中 $a>0$，$b>0$，

所以$\overrightarrow{BP}=(x,y-b)$，$\overrightarrow{PA}=(a-x,-y)$， ………………………………………… 2 分

由$\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$可得$a=\frac{3}{2}x$，$b=3y$， ………………………………………… 4 分

所以 $x>0$，$y>0$，

又因为$\overrightarrow{AB}=(-a,b)=\left(-\frac{3}{2}x,3y\right)$， ………………………………………… 6 分

由$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=3$，

所以$\frac{3}{2}x^2+3y^2=3(x>0,y>0)$， ………………………………………… 9 分

所以点 P 的轨迹方程为$\frac{1}{2}x^2+y^2=1(x>0,y>0)$. ………………………………………… 10 分

18. 解：(1) 根据题意得，椭圆的焦点在 x 轴上，且$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{5}$，

因为 $PF_1\perp PF_2$，

所以$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=(2\sqrt{5})^2=20$， ………………………………………… 2 分

因为$|PF_1|\cdot|PF_2|=6$，

所以$(|PF_1|+|PF_2|)^2=|PF_1|^2+2|PF_1||PF_2|+|PF_2|^2=32$，

所以$|PF_1|+|PF_2|=4\sqrt{2}$， ………………………………………… 4 分

即 $2a=4\sqrt{2}$，$a=2\sqrt{2}$，

所以 $b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{3}=1$； ………………………………………… 6 分

(2) 根据题意得双曲线的焦点在 x 轴上，

设双曲线方程为$\frac{x^2}{a_1}-\frac{y^2}{b_1}=1(a_1>0,b_1>0)$， ………………………………………… 7 分

$(|PF_1|-|PF_2|)^2=(|PF_1|+|PF_2|)^2-4|PF_1|\cdot|PF_2|=32-24=8$，

所以$||PF_1|-|PF_2||=2\sqrt{2}$， ………………………………………… 9 分

即 $2a_1=2\sqrt{2}$，所以 $a_1=\sqrt{2}$，

因为 $c=\sqrt{5}$，所以 $b_1=\sqrt{3}$， ………………………………………… 11 分

所以双曲线方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………… 12 分

19. 解：(1)根据题意，椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过两点$(0,1)$，$\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$.

则有$\begin{cases}b^2=1,\\ \frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1,\end{cases}$ ………………………………………… 3 分

解得 $a=2$，$b=1$，

即椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………… 5 分

(2) 记 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为 $x=y+\sqrt{3}$.

由$\begin{cases}x^2+4y^2=4,\\ x=y+\sqrt{3}\end{cases}$ 消去 x 得 $5y^2+2\sqrt{3}y-1=0$， ………………………………………… 8 分

所以$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1\cdot y_2}=\frac{4\sqrt{2}}{5}$. ………………………………………… 10 分

设直线 l 与 x 轴交于点 $P(\sqrt{3},0)$，$S=\frac{1}{2}|OP||y_1-y_2|$，

$S=\frac{2\sqrt{6}}{5}$. ………………………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1) 因为抛物线 $x^2=2py(p>0)$过点 $P(2,1)$，

所以 $2p=4$，所以抛物线方程为 $x^2=4y$，焦点坐标为$(0,1)$. ………………………… 2 分

(2) 由题意可知直线斜率存在且不等于 0，

设直线 l 的方程为 $y=kx-4$，

由$\begin{cases}y=kx-4,\\x^2=4y,\end{cases}$消去 y 整理得 $x^2-4kx+16=0$，

则 $\Delta=16k^2-64>0$，即$|k|>2$，………………………………………………………… 4 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $T(-x_1,y_1)$，

且 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=16$. ………………………………………………………………… 6 分

直线 TN：$y-y_2=\frac{y_2-y_1}{x_2+x_1}(x-x_2)$，……………………………………………… 8 分

所以 $y=\frac{y_2-y_1}{x_2+x_1}(x-x_2)+y_2$，

所以 $y=\frac{x_2^2-x_1^2}{4(x_1+x_2)}(x-x_2)+\frac{1}{4}x_2^2$，

所以 $y=\frac{x_2-x_1}{4}x-\frac{x_2^2-x_1x_2}{4}+\frac{1}{4}x_2^2$，

所以 $y=\frac{x_2-x_1}{4}x+\frac{x_1x_2}{4}$，

即 $y=\frac{x_2-x_1}{4}x+4$，

所以直线 TN 恒过定点$(0,4)$. …………………………………………………………… 12 分

21. (1) **解**：根据题意得$\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1,\\\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{15}}{6}\times 2c,\\a^2=b^2+c^2.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=1,\\c=\sqrt{3}.\end{cases}$ ……………………… 2 分

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………………………………… 4 分

(2) **解**：(方法一)

因为直线不与 y 轴垂直，所以直线的斜率不为 0.

设直线的方程为 $x=ty-\frac{6}{5}$，

联立方程$\begin{cases}x=ty-\frac{6}{5},\\\frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$化简得$(t^2+4)y^2-\frac{12}{5}ty-\frac{64}{25}=0$. ……………………… 6 分

显然点$Q\left(-\dfrac{6}{5},0\right)$在椭圆$C$的内部，所以$\Delta>0$.

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则$y_1+y_2=\dfrac{12t}{5(t^2+4)}$，$y_1y_2=-\dfrac{64}{25(t^2+4)}$. …………………………………… 9分

又因为$A(-2,0)$，所以$\overrightarrow{AM}=(x_1+2,y_1)$，$\overrightarrow{AN}=(x_2+2,y_2)$.

所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(x_1+2)(x_2+2)+y_1y_2$

$$=\left(ty_1-\frac{6}{5}+2\right)\left(ty_2-\frac{6}{5}+2\right)+y_1y_2$$

$$=(t^2+1)y_1y_2+\frac{4}{5}t(y_1+y_2)+\frac{16}{25}$$

$$=(t^2+1)\cdot\left(-\frac{64}{25(t^2+4)}\right)+\frac{4}{5}t\cdot\frac{12t}{5(t^2+4)}+\frac{16}{25}$$

$$=0,$$

所以$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AN}$，即$\angle MAN=90^\circ$是定值. …………………………………… 12分

（方法二）

(1) 当直线垂直于x轴时，

解得M与N的坐标为$\left(-\dfrac{6}{5},\pm\dfrac{4}{5}\right)$.

由点$A(-2,0)$，易证$\angle MAN=90^\circ$. …………………………………… 6分

(2) 当直线斜率存在时，

设直线的方程为$y=k\left(x+\dfrac{6}{5}\right)$，$k\neq0$.

联立方程$\begin{cases}y=k\left(x+\dfrac{6}{5}\right),\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$

化简得$(1+4k^2)x^2+\dfrac{48}{5}k^2x+\dfrac{4(36k^2-25)}{25}=0$.

显然点$Q\left(-\dfrac{6}{5},0\right)$在椭圆$C$的内部，所以$\Delta>0$.

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=-\dfrac{48k^2}{5(1+4k^2)}$，$x_1x_2=\dfrac{4(36k^2-25)}{25(1+4k^2)}$. …………………………………… 9分

又因为$A(-2,0)$，所以$\overrightarrow{AM}=(x_1+2,y_1)$，$\overrightarrow{AN}=(x_2+2,y_2)$.

所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(x_1+2)(x_2+2)+y_1y_2=(x_1+2)(x_2+2)+k\left(x_1+\dfrac{6}{5}\right)k\left(x_2+\dfrac{6}{5}\right)$

$$=(k^2+1)x_1x_2+\left(2+\frac{6}{5}k^2\right)(x_1+x_2)+4+\frac{36k^2}{25}$$

$$=(k^2+1)\cdot\frac{4(36k^2-25)}{25(1+4k^2)}+\left(2+\frac{6}{5}k^2\right)\cdot\frac{-48k^2}{5(1+4k^2)}+4+\frac{36k^2}{25}$$

$$=0,$$

所以$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AN}$，即$\angle MAN=90^\circ$是定值. …………………………………… 12分

22. 解:(1) 由$\frac{1}{|OF|}+\frac{1}{|OA|}=\frac{3e}{|FA|}$,得$\frac{1}{\sqrt{a^2-3}}+\frac{1}{a}=\frac{3\cdot\frac{\sqrt{a^2-3}}{a}}{a-\sqrt{a^2-3}}$,

即$\frac{a+\sqrt{a^2-3}}{a\cdot\sqrt{a^2-3}}=\frac{3\sqrt{a^2-3}}{a(a-\sqrt{a^2-3})}$, ……………………………………………… 2 分

所以$a[a^2-(a^2-3)]=3a(a^2-3)$,解得$a=2$.

所以椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; ……………………………………………… 4 分

(2) 若选择条件①$\angle MOA\leqslant\angle MAO$:

由已知设直线l的方程为$y=k(x-2)$,$(k\neq0)$,

设$B(x_1,y_1)$,$M(x_0,k(x_0-2))$,

因为$\angle MOA\leqslant\angle MAO$,

所以$x_0\geqslant1$, ……………………………………………… 6 分

再设$H(0,y_H)$,

联立$\begin{cases}y=k(x-2),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得$(3+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-12=0$.

$\Delta=(-16k^2)^2-4(3+4k^2)(16k^2-12)=144>0$.

由根与系数的关系得$2x_1=\frac{16k^2-12}{3+4k^2}$,

所以$x_1=\frac{8k^2-6}{3+4k^2}$,$y_1=k(x_1-2)=\frac{-12k}{3+4k^2}$, ……………………………………………… 8 分

MH所在直线方程为$y-k(x_0-2)=-\frac{1}{k}(x-x_0)$,

令$x=0$,得$y_H=\left(k+\frac{1}{k}\right)x_0-2k$,

因为$BF\perp HF$,

所以$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{HF}=(1-x_1,-y_1)\cdot(1,-y_H)=0$,

即$1-x_1+y_1y_H=1-\frac{8k^2-6}{3+4k^2}-\frac{12k}{3+4k^2}\left[\left(k+\frac{1}{k}\right)x_0-2k\right]=0$, ……………………………… 10 分

整理得:$x_0=\frac{9+20k^2}{12(k^2+1)}\geqslant1$,即$8k^2\geqslant3$.

所以$k\leqslant-\frac{\sqrt{6}}{4}$或$k\geqslant\frac{\sqrt{6}}{4}$. ……………………………………………… 12 分

若选择条件②$|MO|\leqslant|MA|$,则有$\angle MOA\geqslant\angle MAO$,

因为$\angle MOA\geqslant\angle MAO$,

所以$x_0\leqslant1$,则$x_0=\frac{9+20k^2}{12(k^2+1)}\leqslant1$,即$8k^2\leqslant3$.

所以$-\frac{\sqrt{6}}{4}\leqslant k\leqslant\frac{\sqrt{6}}{4}$.(标准同上)

(六)“空间向量与立体几何”综合测试卷

1. B **解析**:因为平面α,β的法向量分别为$\boldsymbol{u}=(3,-1,z)$,$\boldsymbol{v}=(-2,-y,1)$,$\alpha\perp\beta$,