2.2.4　三次函数

导数作为研究函数的重要工具，可通过三次函数这一具体的载体让大家更加深刻地理解导数与原函数的关系。掌握了三次函数的学习方法，更加有助于学习高次函数或者超越函数.

【典型例题】

1. 若 $\frac{1}{3}x^3+ax^2+x=0$ 有两个实数根，求实数 a 的取值范围.　(可因式分解型)

解：$x\left(\frac{1}{3}x^2+ax+1\right)=0$

$\frac{1}{3}x^2+ax+1=0$ 有一个非零实根

$\Delta=a^2-\frac{4}{3}=0$

$a=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. 若 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+1$ 有一个零点，求实数 a 的取值范围.　(极值点可求型)

解：$f'(x)=x^2+ax=x(x+a)=0$　　$x=-a$ 或 $x=0$

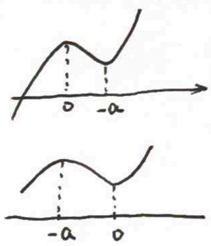
1° $a=0$ 时　$f'(x)\geq 0$　$f(x)\uparrow$　满足

2° $a\neq 0$ 时　$f(-a)\cdot f(0)=\left(-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^3+1\right)\cdot 1>0$

$\frac{1}{6}a^3>-1$

$a^3>-6$

$a>-\sqrt[3]{6}$.



变式：两个零点？

三个零点？

3. (2018 新课标 II 文 21)　证明 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a\left(x^2+x+1\right)$ 只有一个零点.　(极值点不可求型)

解：$f'(x)=x^2-2ax-a$

1° $\Delta=4a^2+4a\leq 0$ 时　$-1\leq a\leq 0$　$f'(x)\geq 0$　$f(x)\uparrow$　满足

2° $\Delta=4a^2+4a>0$ 时　$a<-1$ 或 $a>0$ 时

$x^2-2ax-a=0$ 有两个不等根 x_1, x_2　　$x^2\xrightarrow{=a(2x+1)}$ 降次

$x_1+x_2=2a$，$x_1\cdot x_2=-a$.

$f(x_1)\cdot f(x_2)=a^2\left[\frac{2}{3}(a+1)x_1+\left(\frac{a}{3}+1\right)\right]\left[\frac{2}{3}(a+1)x_2+\left(\frac{a}{3}+1\right)\right]$

$=a^2\left[\frac{4}{9}(a+1)^2x_1\cdot x_2+\frac{2}{3}(a+1)\left(\frac{a}{3}+1\right)(x_1+x_2)+\left(\frac{a}{3}+1\right)^2\right]$

$=a^2\left[\frac{4}{9}(a+1)^2(-a)+\frac{4a}{3}(a+1)\left(\frac{a}{3}+1\right)+\left(\frac{a}{3}+1\right)^2\right]$

$=a^2\left[-\frac{8}{9}a^2-\frac{4}{9}a+\frac{16}{9}a^2+\frac{4a}{3}+\frac{a^2}{9}+\frac{2a}{3}+1\right]$

$=a^2\left[a^2+\frac{14}{9}a+1\right]>0$

$f(x_1)=\frac{1}{3}x_1^3-ax_1^2-ax_1-a$

$=\frac{x_1}{3}a(2x_1+1)-a^2(2x_1+1)-ax_1-a$

$=\frac{2}{3}ax_1^2+\frac{a}{3}x_1-2a^2x_1-ax_1-a^2-a$

$=\frac{2a^2}{3}(2x_1+1)-\left(2a^2+\frac{2}{3}a\right)x_1-a^2-a$

$=-\left(\frac{2a^2}{3}+\frac{2a}{3}\right)x_1-\frac{a^2}{3}-a$

$=-\frac{2a}{3}(a+1)x_1-a\left(\frac{a}{3}+1\right)$

$=-a\left[\frac{2}{3}(a+1)x_1+\left(\frac{a}{3}+1\right)\right]$

4.* 已知 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

(I) 若 x_1 和 x_2 是 $f(x)$ 的极值点，则 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f\left(-\frac{b}{3a}\right)$

(II) 若 x_1 和 x_2 关于 $x=-\frac{b}{3a}$ 对称，则 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f\left(-\frac{b}{3a}\right)$

解：(1) $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$

$x_1+x_2=-\frac{2b}{3a}$

$x_1\cdot x_2=\frac{c}{3a}$

利用 $ax^2=-\frac{2bx+c}{3}$ 降次化简

$f(x_1)=ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d$

$=ax_1\left(-\frac{2bx_1+c}{3a}\right)+bx_1^2+cx_1+d$

$=\frac{1}{3}bx_1^2+\frac{2}{3}cx_1+d$

$=\frac{b}{3}\left(-\frac{2bx_1+c}{3a}\right)+\frac{2c}{3}x_1+d$

$=\left(\frac{-2b^2}{9a}+\frac{2c}{3}\right)x_1+\left(d-\frac{bc}{9a}\right)$

(2) $x_1+x_2=-\frac{2b}{3a}$ 将对称式用基本对称式表示

$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{1}{2}\left[a(x_1^3+x_2^3)+b(x_1^2+x_2^2)+c(x_1+x_2)+2d\right]$

$=\frac{1}{2}\left[a(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)+b\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]+c(x_1+x_2)+2d\right]$

$=\frac{1}{2}\left[a(x_1+x_2)^3\underline{-3a(x_1+x_2)x_1x_2}+b(x_1+x_2)^2\underline{-2bx_1x_2}+c(x_1+x_2)+2d\right]$

$=\frac{1}{2}\left[a(x_1+x_2)^3+b(x_1+x_2)^2+c(x_1+x_2)+2d\right]$

$+\cancel{2bx_1x_2}-\cancel{2bx_1x_2}$

又 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^3+b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+c\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+d$

$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{3}{8}a(x_1+x_2)^3+\frac{b}{4}(x_1+x_2)^2$

$=(x_1+x_2)^2\left[\frac{3}{8}a(x_1+x_2)+\frac{b}{4}\right]=0$ #.

5. 若函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x$ 在 $(3-a^2,a)$ 内有最大值，则实数 a 的取值范围是 $(\sqrt{2},4]$

解

$f'(x)=3x^2-12x+9$

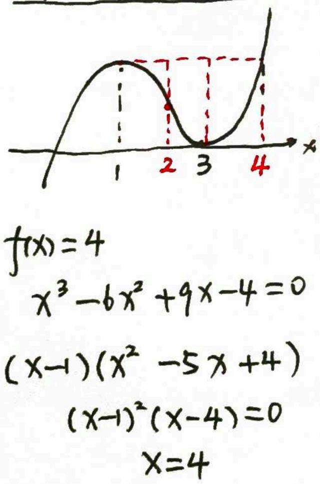
$=3(x^2-4x+3)$

$=3(x-1)(x-3)=0$

题眼：开区间

保证极大值为最大值.

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗



令 $f(x)=4$

$x^3-6x^2+9x-4=0$

$(x-1)(x^2-5x+4)$

$(x-1)^2(x-4)=0$

$x=4$

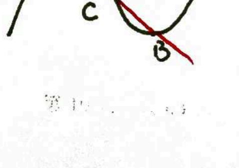
$\begin{cases}3-a^2<1\\1<a\le 4\end{cases}$

得 $\sqrt{2}<a\le 4$.

引申*：观察对称中心、极值点、等高点(极值)的位置特点：

设 $f(x)$ 的极大值为 M，$f(x)=M$ 两根 x_1,x_2 ($x_1<x_2$)

则区间 $[x_1,x_2]$ 被 $-\frac{b}{3a}$ 和极小值点三等分.



由三次方程韦达定理得

$2x_A+x_P=x_A+x_B+x_C=3x_C$

$\therefore\ x_C=\frac{2}{3}x_A+\frac{x_P}{3}$

【巩固练习】

已知零点 $f(x)=(x-x_0)(x-\frac{1}{x_0})(x+1)=x^3+[1-(x_0+\frac{1}{x_0})]x^2+[1-(x_0+\frac{1}{x_0})]x+1$

★可因式分解

1. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ 的两个不同零点为 $x_0,\frac{1}{x_0}$，则 $a^2+(b-2)^2$ 的取值范围是 (D)

A. $(4,+\infty)$ B. $(6,+\infty)$ C. $(8,+\infty)$ D. $(10,+\infty)$

法 $f'(x)=3x^2+2ax+b=0$ 两根为 x_1,x_2

$\Delta=4a^2-12b>0$ 即 $3b<a^2$

$a=1-(x_0+\frac{1}{x_0})$

$b=1-(x_0+\frac{1}{x_0})$

$\therefore a=b=1-(x_0+\frac{1}{x_0})\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

$a^2+(b-2)^2=2a^2-4a+4\in(10,+\infty)$

2. 已知函数 $f(x)=(1+2x)(x^2+ax+b)(a,b\in\mathbb{R})$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为 (D)

$x=-\frac{1}{2}$

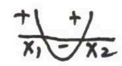
$(-\frac{1}{2},0)$

A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\begin{cases}f(1)=0\\ f(\frac{5}{2})=0\end{cases}$ $\begin{cases}1+\frac{5}{2}=-a\\ \frac{5}{2}=b\end{cases}$ $\begin{cases}a=-\frac{7}{2}\\ b=\frac{5}{2}\end{cases}$

$f(x)=(1+2x)(x^2-\frac{7}{2}x+\frac{5}{2})$
$=(2x+1)(x-1)(x-\frac{5}{2})$

$f'(x)=2(x^2-\frac{7}{2}x+\frac{5}{2})+(1+2x)(2x-\frac{7}{2})$
$=6x^2-12x+\frac{3}{2}$
$=\frac{3}{2}(4x^2-8x+1)$



$x_1=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(1-\frac{\sqrt{3}}{2})=(3-\sqrt{3})(-\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

3. (2012 大纲卷文 21) 设 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+ax$ 有两个极值点 x_1,x_2，若过两点 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$ 的直线 l 与 x 轴的交点在曲线 $y=f(x)$ 上，求 a 的值.

A B

解：$f'(x)=x^2+2x+a=0$

$x_1+x_2=-2$，$x_1\cdot x_2=a$

$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
$=\frac{\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)+(x_2^2-x_1^2)+a(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$
$=\frac{1}{3}(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+x_1+x_2+a$
$=\frac{1}{3}[(x_1+x_2)^2-x_1x_2]+x_1+x_2+a$
$=\frac{2}{3}(a-1)$

又 l 必过对称中心.

$x_{对称中心}=-\frac{b}{3a}=-1$

$(-1,\frac{2}{3}-a)$

AB：$y+a-\frac{2}{3}=\frac{2(a-1)}{3}(x+1)$

令 $y=0$

与 x 轴交点 $(\frac{a}{2(a-1)},0)$

代入 $y=f(x)$ 得

$\frac{1}{3}(\frac{a}{2(a-1)})^3+(\frac{a}{2(a-1)})^2+a\frac{a}{2(a-1)}=0$

得 $a=0$ 或 $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{3}{4}$.

4. (2014 广东文 21) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+ax+1$，当 $a<0$ 时，试讨论是否存在 $x_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $f(x_0)=f\left(\frac{1}{2}\right)$.

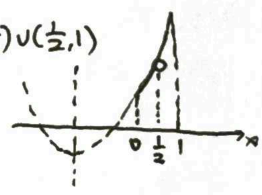
因式分解

解：由 $f(x)=f(\frac{1}{2})$ 得 $(x-\frac{1}{2})[\frac{1}{3}(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})+(x+\frac{1}{2})+a]=0$

$x\neq\frac{1}{2}$ 得 $4x^2+14x+7+12a=0$ $(a<0)$

$-12a=4x^2+14x+7$ $x\in(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$

$h(x)=4x^2+14x+7$



$h(0)=7$，$h(\frac{1}{2})=15$，$h(1)=25$

若存在 $x_0\in(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$，则 $-12a\in(7,15)\cup(15,25)$

$a\in(-\frac{25}{12},-\frac{5}{4})\cup(-\frac{5}{4},-\frac{7}{12})$

$\therefore$ 当 $a\in(-\frac{25}{12},-\frac{5}{4})\cup(-\frac{5}{4},-\frac{7}{12})$ 时 存在 x_0.

当 $a\in(-\infty,-\frac{25}{12}]\cup\{-\frac{5}{4}\}\cup[-\frac{7}{12},0)$ 时不存在 x_0.

5. 若函数 $f(x)=x^3-3a^2x+2(a>0)$ 有三个零点，求实数 a 的取值范围. 极值点的方法

解：$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x-a)(x+a)=0$

$x_{1,2}=\pm a$

函数有3个零点 等价于 $\begin{cases}\Delta>0\\ f(x_1)\cdot f(x_2)<0\end{cases}$

$\begin{cases}a\neq 0\\ f(a)\cdot f(-a)=4-4a^6<0\end{cases}$

$\therefore\ a>1.$

6. 若 $\frac{1}{3}x^3-x^2+ax-a=0$ 只有一个实数根，求 a 的取值范围. 极值点不同号.

解. 令 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax-a$

$f'(x)=x^2-2x+a$

1° $\Delta\leq 0$ 即 $a\geq 1$ 时 $f'(x)\geq 0$，$f(x)$ 单调(满足)

2° $\Delta=4-4a>0$ 即 $a<1$ 时

$f'(x)=0$ 两根为 x_1,x_2

$\begin{cases}x_1+x_2=2\\ x_1\cdot x_2=a\end{cases}$

且 $x_1^2=2x_1-a$

$f(x_1)\cdot f(x_2)>0$

而 $f(x_1)=\frac{1}{3}x_1^3-x_1^2+ax_1-a$

$=\frac{1}{3}x_1(2x_1-a)-(2x_1-a)+ax_1-a$

$=\frac{2}{3}x_1^2+(\frac{2a}{3}-2)x_1$

$=\frac{2}{3}(2x_1-a)+(\frac{2a}{3}-2)x_1=\frac{2}{3}[(a-1)x_1-a]$

同理 $f(x_2)=\frac{2}{3}[(a-1)x_2-a]$

$f(x_1)\cdot f(x_2)=\frac{4}{9}[(a-1)^2x_1x_2-a(a-1)(x_1+x_2)+a^2]$

$=\frac{4a}{9}(a^2-3a+3)>0$

$\therefore\ a>0$ 又 $a<1$

$\therefore\ 0<a<1.$

7. (2014 北京文 20)　已知函数 $f(x)=2x^3-3x$

(I) 若过点 $P(1,m)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，求 m 的取值范围

(II) 问过点 $A(-1,2),B(2,1),C(0,2)$ 分别存在几条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切？(只需写出结论)

解 设切点 $(t,f(t))$

切线 $y-(2t^3-3t)=(6t^2-3)(x-t)$

过 (a,b) 得 $4t^3-6at^2+3a+b=0$

令 $g(t)=4t^3-6at^2+3a+b$

$g'(t)=12t^2-12at=0$

$t_1=0,\ t_2=a.$

(1) 若 $(a,b)=(1,m)$，则 $t_1=0,\ t_2=1.$

$\because$ 过P有3条直线与曲线相切

$\therefore$ 有3个切点 即关于t的方程有3个根

$\therefore\ g(0)\cdot g(1)<0$

即 $(m+3)(m+1)<0$

$\therefore\ -3<m<-1$

(2)

① 若 $(a,b)=(-1,2)$　$t_1=0,\ t_2=-1$

$g(-1)=1>0,\ g(0)=-1<0$　3个切点 — 3条

② 若 $(a,b)=(2,10)$　$t_1=0,\ t_2=2$

$g(0)=16>0,\ g(2)=0$　2个切点 — 2条

③ 若 $(a,b)=(0,2)$　$t_1=0,\ t_2=0$

$g(t)$ 单调递增　1个切点 — 1条