高三第三次调研测试数学参考答案

1. $\{-1,0,1,2\}$ **2.** 1 **3.** 5 **4.** 55 **5.** $\frac{3}{5}$ **6.** $\sqrt{2}$ **7.** $\frac{33}{65}$

8. $\frac{5}{6}$ **9.** 9 **10.** -32 **11.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ **12.** $-\frac{9}{2}$ **13.** $(27,+\infty)$ **14.** $[\sqrt{10},\sqrt{42})$

注：13. $k>27$ **同样给分**

15.【解】（1）在△ABC 中，因为 $\frac{5(\sin C-\sin B)}{a}=\frac{5\sin A-8\sin B}{b+c}$，

所以由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得 $5(b+c)(c-b)=a(5a-8b)$，

即 $a^2+b^2-c^2=\frac{8}{5}ab$， …… 4 分

所以由余弦定理，得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4}{5}$. …… 7 分

（2）因为 $\cos C=\frac{4}{5}$， $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{3}{5}$， …… 9 分

所以 $\sin 2C=2\sin C\cos C=\frac{24}{25}$. …… 12 分

因为 $A=C$，所以 $\sin B=\sin(\pi-A-C)=\sin(A+C)=\sin 2C=\frac{24}{25}$. …… 14 分

注：(1)正弦定理与 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$**，写一个不扣分，两者都不写，扣 2 分；余弦定理同样；**

(2)只要有 $\sin B=\sin(A+C)$**，就不扣分，否则扣 2 分**

16.【证】（1）在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $CC_1\perp$ 平面 ABC，

因为 $AC\subset$ 平面 ABC，所以 $CC_1\perp AC$. …… 2 分

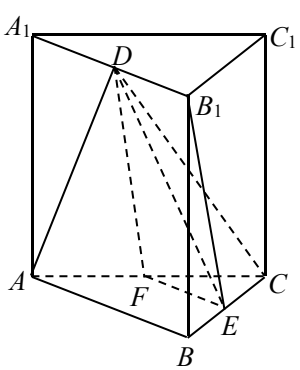
又因为 $AC\perp BC$， $BC\cap CC_1=C$， BC，$CC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $AC\perp$ 平面 BCC_1B_1. …… 4 分

因为 $AC\subset$ 平面 ACD，

所以平面 $ACD\perp$ 平面 BCC_1B_1. …… 6 分

（2）（方法一）取 AC 的中点 F，连结 DF，EF.



因为在△ABC 中，E 是 BC 的中点， F 是 AC 的中点，

所以 $EF/\!/AB$，且 $EF=\frac{1}{2}AB$. …… 8 分

因为 D 是 A_1B_1 的中点，所以 $B_1D=\frac{1}{2}A_1B_1$.

又因为在棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB/\!/A_1B_1$，且 $AB=A_1B_1$，

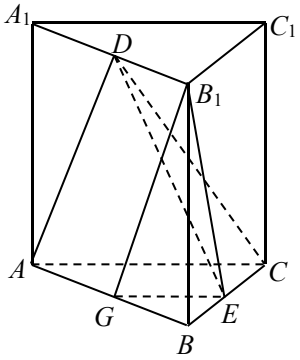
所以 $EF/\!/DB_1$，且 $EF=DB_1$， …… 10 分

所以四边形 $EFDB_1$ 是平行四边形，所以 $B_1E \parallel FD$. …… 12 分

因为 $B_1E \not\subset$ 平面 ADC， $FD \subset$ 平面 ADC，

所以 $B_1E \parallel$ 平面 ACD . …… 14 分

（方法二）取 AB 的中点 G，连结 EG，B_1G.



因为在△ABC 中，E 是 BC 的中点， G 是 AB 的中点，

所以 $EG \parallel AC$.

因为 $GE \not\subset$ 平面 ACD， $AC \subset$ 平面 ACD，

所以 $EG \parallel$ 平面 ACD. …… 8 分

在棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB \parallel A_1B_1$，且 $AB = A_1B_1$ ，

因为 D 是 A_1B_1 的中点，G 是 AB 的中点，

所以 $AG \parallel DB_1$，且 $AG = DB_1$，

所以四边形 AGB_1D 是平行四边形，所以 $B_1G \parallel AD$.

因为 $B_1G \not\subset$ 平面 ACD， $AC \subset$ 平面 ACD，

所以 $B_1G \parallel$ 平面 ACD. …… 10 分

又因为 $EG \parallel$ 平面 ACD， BG，$GE \subset$ 平面 B_1GE， $B_1G \cap GE = G$ ，

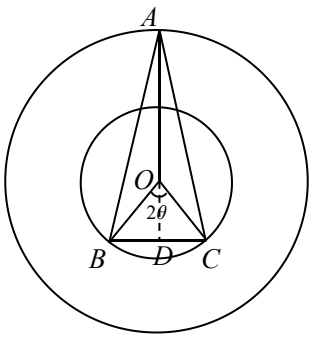
所以平面 $B_1GE \parallel$ 平面 ACD. …… 12 分

因为 $B_1E \subset$ 平面 B_1GE，

所以 $B_1E \parallel$ 平面 ACD . …… 14 分

注：少一个条件 2 分全扣；（1）中没有“在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中”全扣(突然死亡法)

17.【解】过点 O 作 $OD \perp BC$ 于点 D，则 D 为 BC 的中点.



又△ABC 为等腰三角形，所以 A，O，D 三点共线，

所以 $\angle AOB = \angle AOC = \pi - \theta$.

所以 $S_1 = \frac{1}{2} \times 2\theta \times 1^2 - \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin 2\theta = \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$ ， …… 2 分

$S_2 = 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 2\sin(\pi - \theta) = 2\sin\theta$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. …… 4 分

注：只要有 S_1 结果的就给 2 分；同样只要，有 S_2 结果的就给 2 分；

（1）当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时， $S_2 - S_1 = 2\sin\theta - \left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$

$$=2\sin\frac{\pi}{3}-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}.$$

答：当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时， S_2-S_1 的值为 $\left(\frac{5\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\text{cm}^2$. …… 6 分

（2）设 $f(\theta)=S_2-S_1=2\sin\theta-\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $f'(\theta)=2\cos\theta-1+\cos2\theta=2\left(\cos^2\theta+\cos\theta-1\right)$. …… 8 分

令 $f'(\theta)=0$，得 $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$， $\cos\theta=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$（舍），

记 $\cos\theta_0=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$， $0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$. …… 10 分

θ	$(0,\ \theta_0)$	θ_0	$(\theta_0,\frac{\pi}{2})$
$f'(\theta)$	+	0	−
$f(\theta)$	↗	极大值	↘

所以当 $\cos\theta_0=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时， $f(\theta)$ 取得最大值，此时 S_2-S_1 的值最大.

答：当纪念章最美观时， $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. …… 14 分

注：一个答案 1 分，写成“所以”不扣分；答案中没有单位 cm^2 的，扣 1 分

18.【解】（1）设椭圆的焦距为 $2c$，所以 $\begin{cases}2b=2\sqrt{2},\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $a^2=6$， $b^2=2$， $c^2=4$.

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$. …… 3 分

（2）因为直线 MN 的斜率为 $\sqrt{5}$，且过点 $F_2(2,0)$，所以直线 MN 的方程为 $y=\sqrt{5}(x-2)$.

由 $\begin{cases}y=\sqrt{5}(x-2),\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $8x^2-30x+27=0$，解得 $x=\frac{3}{2}$， $x=\frac{9}{4}$.

所以 $M(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{5}}{2})$， $N(\frac{9}{4},\frac{\sqrt{5}}{4})$.

所以 $MN=\sqrt{(\frac{9}{4}-\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{5}}{2})^2}=\frac{3\sqrt{6}}{4}$. …… 6 分

又因为 $(MF_1+MF_2)+(NF_1+NF_2)=MF_1+NF+MN=4\sqrt{6}$，

所以 $MF_1+NF_1=\frac{13\sqrt{6}}{4}$. …… 8 分

（3）设 $M(x_1,\ y_1)$， $N(x_2,\ y_2)$. 又 $P(t,0)$， $t>2$，

所以 $\overrightarrow{PM}=(x_1-t,\ y_1)$，$\overrightarrow{PN}=(x_2-t,\ y_2)$.

又因为点 P 在以 MN 为直径的圆上，所以 $\overrightarrow{PM}\perp\overrightarrow{PN}$，

所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(x_1-t)(x_2-t)+y_1y_2=0$，

所以 $x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2+y_1y_2=0$. …… 10 分

①当直线 MN 倾斜角为 0 时，$N(-\sqrt{6},0)$，$M(\sqrt{6},0)$，所以 $t=\sqrt{6}$.

②当直线 MN 倾斜角不为 0 时，设直线 MN 方程为 $x=my+2$.

由 $\begin{cases}x=my+2,\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 消去 x，得 $(m^2+3)y^2+4my-2=0$. 所以 $\begin{cases}\Delta=16m^2+8(m^2+3)>0,\\ y_1+y_2=\dfrac{-4m}{m^2+3},\\ y_1y_2=\dfrac{-2}{m^2+3}.\end{cases}$

所以 $x_1x_2=(my_1+2)(my_2+2)=m^2y_1y_2+2m(y_1+y_2)+4$，

$x_1+x_2=m(y_1+y_2)+4$. …… 12 分

所以 $(m^2+1)y_1y_2+(2m-tm)(y_1+y_2)+4-4t+t^2=0$，

所以 $m^2=-\dfrac{3t^2-12t+10}{t^2-6}\geqslant 0$， …… 14 分

解得 $\sqrt{6}<t\leqslant 2+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $-\sqrt{6}<t\leqslant 2-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$（舍去）.

综合①②得，实数 t 的取值范围是 $\left[\sqrt{6},\ 2+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right]$. …… 16 分

19.【解】（1）$n\geqslant 2$ 时，$a_n=\dfrac{T_n}{T_{n-1}}=2^{n-1}$，

$n=1$ 时，$a_1=T_1=1$，符合上式，**(没有验证的，扣 1 分)** …… 2 分

所以 $a_n=2^{n-1}$，$n\in\mathrm{N}^*$，所以 $b_n=a_na_{n+2}=4^n$，

所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=4^n$. …… 3 分

（2）因为 $b_1=a_1\cdot a_{1+k}=1+kd$，$b_2=a_2\cdot a_{2+k}=(1+d)\left[1+(k+1)d\right]$，$b_2-b_1=4$，

所以 $4=b_2-b_1=(k+1)d^2+2d=d\left[(k+1)d+2\right]$.

因为 $k\in\mathbf{N}^*$，$d\geqslant 0$，且 $d\in\mathbf{Z}$，所以 $d<(k+1)d+2$，

所以 $d=1$. 所以 $4-2\times 1=(k+1)\times 1^2$，则 $k=1$. …… 7 分

(只要出现 $d=1$， $k=1$，就各得 2 分)

从而 $a_n=n$， $b_n=a_na_{n+1}=n(n+1)$，所以 $\frac{1}{b_n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

所以 $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_{2020}}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{2020}-\frac{1}{2021})$

$=1-\frac{1}{2021}=\frac{2020}{2021}$. …… 9 分

（3）设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，显然 $q>0$.

由 $b_n=a_n\cdot a_{n+k}$ ①， $b_{n+k}=a_{n+k}\cdot a_{n+2k}$ ②，

②÷①得， $\frac{b_{n+k}}{b_n}=\frac{a_{n+k}\cdot a_{n+2k}}{a_n\cdot a_{n+k}}=q^k$.

因为 $a_n\cdot a_{n+2k}=a_{n+k}^2$，所以 $\frac{a_{n+k}}{a_n}=\frac{a_{n+2k}}{a_{n+k}}$，即 $\left(\frac{a_{n+k}}{a_n}\right)^2=q^k$，

所以 $\frac{a_{n+k}}{a_n}=q^{\frac{k}{2}}$（正常数）. …… 12 分

由 $b_n=a_n\cdot a_{n+k}$ ③， $b_{n+1}=a_{n+1}\cdot a_{n+k+1}$ ④，

④÷③得， $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}=q$ （*）. …… 14 分

因为 $\frac{a_{n+k}}{a_n}=q^{\frac{k}{2}}$，所以 $\frac{a_{n+1+k}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+k}}{a_n}$，将 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+1+k}}{a_{n+k}}$ 代入（*）式，得到 $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2=q$，

即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q^{\frac{1}{2}}$（正常数），所以 $\{a_n\}$ 为公比为 $q^{\frac{1}{2}}$ 的等比数列. …… 16 分

20.【解】（1）因为 $f(x)=\frac{a\ln x}{x}$，所以 $f'(x)=\frac{a(1-\ln x)}{x^2}$. …… 1 分

令 $f'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}$，因为 $a>0$，列表如下：

x	$(0,\mathrm{e})$	e	$(\mathrm{e},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $f(x)_{\text{极大值}}=f(\mathrm{e})=\frac{a\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}$，所以 $a=1$. …… 3 分

（2）当 $a=\mathrm{e}$ 时， $f(x)=\frac{\mathrm{e}\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{\mathrm{e}(1-\ln x)}{x^2}$， $g(x)=\frac{x+1}{\mathrm{e}^x}$，则 $g'(x)=\frac{-x}{\mathrm{e}^x}$.

曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线互相垂直，

所以 $f'(x_0)\cdot g'(x_0)=-1$，即 $\frac{\mathrm{e}(1-\ln x_0)}{x_0^2}\cdot\frac{-x_0}{\mathrm{e}^{x_0}}=-1$， …… 5 分

整理得 $x_0e^{x_0}+e\ln x_0-e=0$．设 $r(x)=xe^x+e\ln x-e$，则 $r'(x)=(x+1)e^x+\frac{e}{x}$．

因为 $x>0$，所以 $r'(x)>0$，

所以 $r(x)=xe^x+e\ln x-e$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．　　…… 7 分

又因为 $r(1)=0$，且 $r(x_0)=0$，所以 $x_0=1$．　　…… 8 分

（3）$h(x)=\frac{x+\ln a}{e^x}-\frac{a\ln x}{x}$，设 $m(x)=e^x-ex$，则 $m'(x)=e^x-e$．令 $m'(x)=0$，得 $x=1$．

列表如下：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$m'(x)$	−	0	+
$m(x)$	↘	极小值	↗

所以 $m(x)_{\text{最小值}}=m(1)=0$．

所以 $e^x\geqslant ex$，所以 $\ln e^x\geqslant\ln(ex)$，即 $x\geqslant 1+\ln x$，即 $\ln x\leqslant x-1$．　　…… 10 分

注：主要出现上面一行内容，就给 2 分

① $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时，$\ln a\geqslant -1$．又因为 $0<x<1$，所以 $\ln x<0$．

$$h'(x)=\frac{1-(x+\ln a)}{e^x}-\frac{a(1-\ln x)}{x^2}\leqslant\frac{1-(x-1)}{e^x}-\frac{1-\ln x}{ex^2}$$

$$\leqslant\frac{2-x}{e^x}-\frac{1-(x-1)}{ex^2}\leqslant\frac{2-x}{ex}-\frac{2-x}{ex^2}=\frac{(2-x)(x-1)}{ex^2}<0.$$

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $h(x)>h(1)=\frac{1+\ln a}{e}\geqslant 0$．　　…… 14 分

②当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，$h(1)=\frac{1+\ln a}{e}<0$，$\ln a<0$，$e^a>1$，

所以 $h(a)=\frac{a+\ln a}{e^a}-\ln a=\frac{a}{e^a}+\frac{(1-e^a)\ln a}{e^a}>\frac{a}{e^a}>0$，

又 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上图象不间断，所以存在 $t\in(0,1)$，使 $h(t)=0$，不合题意．

综上，a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$．　　…… 16 分

附加题参考答案

21A.【解】因为 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&m\\2&1\end{bmatrix}$ 的一个特征向量，

所以存在非零实数 λ，使得 $\boldsymbol{M\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，

所以 $\begin{bmatrix}1&m\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，即 $\begin{cases}1+m=\lambda,\\2+1=\lambda,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=2,\\\lambda=3,\end{cases}$ 则 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$. …… 5 分

设 $\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{MM}^{-1}=\boldsymbol{E}$，即 $\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，所以 $\begin{cases}a+2c=1,\\b+2d=0,\\2a+c=0,\\2b+d=1,\end{cases}$

解得 $a=-\frac{1}{3}$，$b=\frac{2}{3}$，$c=\frac{2}{3}$，$d=-\frac{1}{3}$. 所以 $\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$. …… 10 分

B.【解】将直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}+t,\\y=1+\sqrt{3}t\end{cases}$（$t$ 为参数）化为普通方程为 $\sqrt{3}x-y-2=0$. 3 分

由 $\rho=2r\sin\theta(r>0)$，得 $\rho^2=2r\rho\sin\theta$，

所以圆 C 的直角坐标方程为 $x^2+(y-r)^2=r^2$. …… 6 分

因为直线 l 与圆 C 恒有公共点，所以 $\frac{|-r-2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}\leqslant r$，解得 $r\geqslant 2$.

所以实数 r 的取值范围是 $[2,+\infty)$. …… 10 分

C.【证】因为 $x>1$， $y>1$，且 $x+y=4$，由柯西不等式得，

$\left(\frac{y^2}{x-1}+\frac{x^2}{y-1}\right)[(x-1)+(y-1)]\geqslant\left(\sqrt{\frac{y^2}{x-1}}\cdot\sqrt{x-1}+\sqrt{\frac{x^2}{y-1}}\cdot\sqrt{y-1}\right)^2=(x+y)^2=16$， …… 8 分

即 $\left(\frac{y^2}{x-1}+\frac{x^2}{y-1}\right)\times 2\geqslant 16$，所以 $\frac{y^2}{x-1}+\frac{x^2}{y-1}\geqslant 8$. …… 10 分

22.【解】（1）X 的可能取值为 1，2，3，4， $P(X=1)=\frac{1}{6}$，

$P(X=2)=\frac{5}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{6}$， $P(X=3)=\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$，

$P(X=4)=\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$， **(每个 1 分)**

X	1	2	3	4

所以 X 的分布列为

P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

所以 $E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{2}=3$．(1 分) …… 5 分

（2）（法一）记成功打开一扇门的事件为 A，

则 $P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$， …… 8 分

记恰好成功打开 4 扇门的事件为 B，

则 $P(B)=C_5^4(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})=\frac{80}{243}$．

答：恰好成功打开 4 扇门的概率为 $\frac{80}{243}$． …… 10 分

（法二）记成功打开一扇门的事件为 A，则 $P(A)=1-\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$． …… 8 分

记恰好成功打开 4 扇门的事件为 B，则 $P(B)=C_5^4(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})=\frac{80}{243}$．

答：恰好成功打开 4 扇门的概率为 $\frac{80}{243}$．(答案不写扣 1 分) …… 10 分

23.【解】（1）当 $AB\perp x$ 轴时， $AF=p$， $EF=p$，

所以 $EA=\sqrt{2}p=2$，即 $p=\sqrt{2}$，所以抛物线的方程为 $y^2=2\sqrt{2}x$． …… 2 分

（2）设直线 AB 的方程为 $x=my+\frac{\sqrt{2}}{2}$，由 $\begin{cases}y^2=2\sqrt{2}x,\\ x=my+\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$ 得 $y^2-2\sqrt{2}my-2=0$．

设 $A(x_1,\ y_1)$， $B(x_2,\ y_2)$，所以 $y_1+y_2=2\sqrt{2}m$， $y_1y_2=-2$，

直线 AE 方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$．

令 $x=0$，得 $y_M=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}y_1}{x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}y_1}{my_1+\sqrt{2}}$，同理 $y_N=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}y_2}{x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}y_2}{my_2+\sqrt{2}}$， …… 4 分

所以 $|y_M-y_N|=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\frac{y_1}{my_1+\sqrt{2}}-\frac{y_2}{my_2+\sqrt{2}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\frac{\sqrt{2}(y_1-y_2)}{(my_1+\sqrt{2})(my_2+\sqrt{2})}\right|$， …… 6 分

其中 $m^2y_1y_2+\sqrt{2}m(y_1+y_2)+2=\left|-2m^2+4m^2+2\right|=2m^2+2$，

则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}EF|y_1-y_2|}{\frac{1}{2}EO|y_M-y_N|}=4m^2+4\geqslant 4$，因此 $\frac{S_1}{S_2}$ 的取值范围为 $[4,+\infty)$． …… 10 分