江苏省仪征中学2020届高考考前数学热身练 3

班级________ 姓名__________ 学号________ 日期________ 评价________

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共70分.

1. 已知集合 $A=\{x|0\leqslant x<2\}$，集合 $B=\{-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B=$ ____________.

2. 已知复数 $z=1+2\mathrm{i}$（i为虚数单位），则 z^2 的实部为 ____________.

3. 某高中高一、高二、高三年级的学生人数之比为 $9:8:8$，现用分层抽样的方法从该校三个年级的学生中抽取容量为100的样本，则应从高三年级抽取的学生的人数为 ____________.

```
T←1
i←3
While i<8
   T←T+i
   i←i+2
End While
Print   T
```

（第4题图）

4. 运行右图所示的伪代码，输出的 T 的值为 ____________.

5. 从集合 $\left\{2,3,\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right\}$ 中取两个不同的数 a，b，则 $\log_a b>0$ 的概率为 ____________.

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的一个焦点到一条渐近线的距离为3，则此双曲线的离心率为 ____________.

7. 已知 $\cos\alpha+\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{5}$，则 $\sin\left(\alpha+\dfrac{7\pi}{6}\right)$ 的值为 ____________.

8. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $\dfrac{S_{20}-S_{10}}{S_{30}-S_{20}}=\dfrac{1}{3^{10}}$，则数列 $\{a_n\}$ 的公比为 ____________.

9. 在平面直角坐标系 xOy 中，过直线 $y=2x$ 上一点 P 作圆 $C:(x-3)^2+(y-1)^2=1$ 的切线 PA，PB，其中 A，B 为切点．若直线 PA，PB 关于直线 $y=2x$ 对称，则线段 PA 的长度为 ____________.

10. 设棱长为 a 的正方体的体积和表面积分别为 V_1,S_1，底面半径和高均为 r 的圆锥的体积和侧面积分别为 V_2,S_2，若 $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{3}{\pi}$，则 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的值为 ____________.

11. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2-5x$，则不等式 $f(x-2)>f(x)$ 的解集为 ____________.

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-(x-1)^2}, & 0\leqslant x<2,\\ f(x-2), & x\geqslant 2\end{cases}$ 若对于正数 $k_n(n\in\mathbf{N}^*)$，直线 $y=k_nx$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象恰有 $2n+1$ 个不同的交点，则数列 $\{k_n^2\}$ 的前 n 项和为 ____________.

13. 设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心（三角形三条高的交点），且 $3\overrightarrow{HA}+4\overrightarrow{HB}+5\overrightarrow{HC}=0$，则 $\cos\angle AHB$ 的值为 ____________.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，其接圆半径为 R．已知 $c=1$，且 $\triangle ABC$ 的面积 $S=2R^2\sin(B-A)\sin(B+A)$，则 a 的最小值为 ____________.

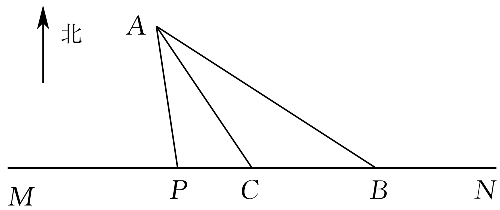
二、解答题：

1. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．已知 $\cos A=\dfrac{3}{5}$.

（1）若 $\triangle ABC$ 的面积为3，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值；

（2）设 $m=\left(2\sin\dfrac{B}{2},1\right)$，$n=\left(\cos B,\cos\dfrac{B}{2}\right)$，且 $m\,/\!/\,n$，求 $\sin(B-2C)$ 的值.

2. 如图,海岸公路 MN 的北方有一个小岛 A(大小忽略不计)盛产海产品,在公路 MN 的 B 处有一个海产品集散中心,点 C 在 B 的正西方向 10km 处,$\tan\angle ABC=\dfrac{3}{4}$,$\angle ACM=\dfrac{\pi}{4}$,计划开辟一条运输线将小岛的海产品运送到集散中心.现有两种方案:①沿线段 AB 开辟海上航线:②在海岸公路 MN 上选一点 P 建一个码头,先从海上运到码头,再公路 MN 运送到集散中心.已知海上运输、岸上运输费用分别为 400 元/km、200 元/km.



(1)求方案①的运输费用;

(2)请确定 P 点的位置,使得按方案②运送时运输费用最低?

3. 在平面直角坐标系 xOy 中,已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过 $\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$,且右焦点坐标为 $(1,0)$.

(1)求椭圆的标准方程;

(2)设 A,B 为椭圆的左,右顶点,C 为椭圆的上顶点,P 为椭圆上任意一点(异于 A,B 两点),直线 AC 与直线 BP 相交于点 M,直线 BC 与直线 AP 相交于点 N,求证:$MC=NC$.

3. 若存在常数 $m\in\mathbf{R}$，使对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+1}\geqslant ma_n$，则称数列 $\{a_n\}$ 为 $Z(m)$ 数列.

(1)已知 $\{a_n\}$ 是公差为2的等差数列，其前 n 项和为 S_n．若 S_n 是 $Z(1)$ 数列，求 a_1 的取值范围；

(2)已知数列 $\{b_n\}$ 的各项均为正数，记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 R_n，数列 $\{b_n^2\}$ 的前 n 项和为 T_n，且 $3T_n=R_n^2+4R_n$, $n\in\mathbf{N}^*$.

求证：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列.

三.附加题

1.已知 $b, c\in\mathbf{R}$，向量 $e_1=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ 是矩阵 $M=\begin{bmatrix}1 & b\\ c & 2\end{bmatrix}$ 的属于特征值4的一个特征向量．求矩阵 M 及它的另一个特征值.

2. 在极坐标系中，设直线 l 过点 $A\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{6}\right)$，$B(3,0)$，且线 l 与曲线 $C:\rho=a\cos\theta(a>0)$ 有且只有一个公共点，求正数 a 的值.

3. 某工厂的某种产品成箱包装，每箱 20 件，每一箱产品在交付用户时，用户要对该箱中部分产品作检验.设每件产品为不合格品的概率都为 $p(0<p<1)$，且各件产品是否合格相互独立.

(1)记某一箱 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $f(p)$，$f(p)$ 取最大值时对应的产品为不合格品概率为 p_0，求 p_0；

(2)现从某一箱产品中抽取 3 件产品进行检验，以(1)中确定的 p_0 作为 p 的值，已知每件产品的检验费用为10 元，若检验出不合格品，则工厂要对每件不合格品支付 30 元的赔偿费用，检验费用与赔偿费用的和记为 X，求 X 的分布列和数学期望.

答案及评分标准

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分．

1．【答案】$\{0,1\}$　**2．**【答案】-3　**3．**【答案】32　**4．**【答案】16

5．【答案】$\frac{1}{3}$　**6．**【答案】$\sqrt{10}$　**7．**【答案】$-\frac{4}{5}$　**8．**【答案】3

9．【答案】2　**10．**【答案】$\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$　**11．**【答案】$\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$　**12．**【答案】$\frac{n}{4n+4}$

13．【答案】$-\frac{\sqrt{6}}{6}$　**14．**【答案】$\frac{\sqrt{5}}{5}$

二、解答题：

1．解：因为 A 为△ABC 的内角，且 $\cos A=\frac{3}{5}$， 所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{4}{5}$．

因为△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=3$，所以 $cb=\frac{6}{\sin A}=\frac{15}{2}$．

所以 $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=bc\cos A=\frac{15}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{2}$．

（2）因为 $\boldsymbol{m}=\left(2\sin\frac{B}{2},1\right)$，$\boldsymbol{n}=\left(\cos B,\cos\frac{B}{2}\right)$，且 $\boldsymbol{m}//\boldsymbol{n}$，

所以 $2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=\cos B$，即 $\sin B=\cos B$．若 $\cos B=0$，则 $\sin B=0$，舍，

所以 $\cos B\neq 0$，所以 $\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=1$．因为 B 为三角形的内角，所以 $B=\frac{\pi}{4}$．

由（1）知 $\cos A=\frac{3}{5}$，$\sin A=\frac{4}{5}$，

所以 $\sin 2A=2\sin A\cos A=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$，$\cos 2A=2\cos^2 A-1=2\times\frac{9}{25}-1=-\frac{7}{25}$．

因为 $A+C=\frac{3\pi}{4}$，所以 $2C=\frac{3\pi}{2}-2A$，所以 $B-2C=2A-\frac{5\pi}{4}$，

所以 $\sin(B-2C)=\sin(2A-\frac{5\pi}{4})$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2A+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2A=-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{24}{25}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{7}{25}=-\frac{31\sqrt{2}}{50}．$$ ………14 分

2．解：（1）在△ABC 中，因为 $\tan\angle ABC=\frac{3}{4}$，所以 $\frac{\sin\angle ABC}{\cos\angle ABC}=\frac{3}{4}$，

又因为 $\sin^2\angle ABC+\cos^2\angle ABC=1$，所以 $\sin\angle ABC=\frac{3}{5}$，$\cos\angle ABC=\frac{4}{5}$．… 2 分

所以 $\sin\angle BAC=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\angle ABC\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{\sqrt{2}}{10}$，　…………… 4 分

因为 $\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AB}{\sin\frac{\pi}{4}}$，所以 $AB\times\frac{\sqrt{2}}{10}=10\times\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故 $AB=50$，所以费用 $y_1=50\times 400=2\times 10^4$．

（2）过点 A 作 $AQ\perp MN$ 于点 Q，则 $AQ=30$，$BQ=40$，

欲使费用最小，则 P 点在 Q 点的正东方向．

设 $\angle APM=\theta$，则 $\angle ABC<\theta<\frac{\pi}{2}$，

则 $\sin\angle BAP=\sin(\theta-\angle ABC)=\frac{4}{5}\sin\theta-\frac{3}{5}\cos\theta$，

因为 $\frac{AB}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{AP}{\sin\angle ABC}=\frac{BP}{\sin\angle BAP}$，

所以 $\frac{50}{\sin\theta}=\frac{5AP}{3}=\frac{BP}{\sin\angle BAP}$，

所以 $AP=\frac{30}{\sin\theta}$， $BP=\frac{40\sin\theta-30\cos\theta}{\sin\theta}$， …………… 8 分

故费用 $y_2=400AP+200BP=2000\left(\frac{6}{\sin\theta}+\frac{4\sin\theta-3\cos\theta}{\sin\theta}\right)$， …………… 10 分

令 $f(\theta)=\frac{6-3\cos\theta}{\sin\theta}$， 所以 $f'(\theta)=\frac{3\sin\theta\cdot\sin\theta-(6-3\cos\theta)\cdot\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{3-6\cos\theta}{\sin^2\theta}$，

令 $f'(\theta)=0$，则 $\cos\theta=\frac{1}{2}$， $\theta=\frac{\pi}{3}$， 记 $\angle ABC=\theta_0$，

θ	$\left(\theta_0,\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$	$-$	0	$+$
$f(\theta)$	递减	极小值	递增

此时 $PQ=\frac{AQ}{\tan 60^\circ}=10\sqrt{3}$，所以 $BP=40-10\sqrt{3}$． …………… 13 分

答：（1）求方案①的运输费用为 2 万元；

（2）P 点在 B 点的正西方向且距离为 $\left(40-10\sqrt{3}\right)$ 千米时，方案②运输费用最低.

…………… 14 分

3.解：（1）设椭圆的焦距为 $2c$，因为右焦点 F 坐标为 $(1,0)$，则 $c=1$，故 $c^2=a^2-b^2=1$，

令 $x=-1$， $y=\frac{3}{2}$，所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$， …………… 3 分

所以 $a^2=4$， $b^2=3$，

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$． …………… 5 分

（2）设 $P(x_1,y_1)$，有 $x_1\neq\pm2$，因为 A，B 为椭圆的左，右顶点，C 为椭圆的上顶点，

所以 $A(-2,0)$， $B(2,0)$， $C(0,\sqrt{3})$，

由 $\begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}, \\ y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2), \end{cases}$ ，解得 $x_M=\frac{4y_1+2\sqrt{3}x_1-4\sqrt{3}}{2y_1-\sqrt{3}x_1+2\sqrt{3}}$． …………… 7 分

又 $\begin{cases} y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}, \\ y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2), \end{cases}$ ，解得 $x_N=\frac{-4y_1+2\sqrt{3}x_1+4\sqrt{3}}{2y_1+\sqrt{3}x_1+2\sqrt{3}}$． …………… 9 分

因为 $|MC|^2={x_M}^2+\left(y_M-\sqrt{3}\right)^2=\frac{7}{4}{x_M}^2$， $|NC|^2={x_N}^2+\left(y_N-\sqrt{3}\right)^2=\frac{7}{4}{x_N}^2$，

要证 $|MC|=|NC|$，即证 $x_M=x_N$． …………… 11 分

令 $x_M-x_N=\dfrac{4y_1+2\sqrt{3}x_1-4\sqrt{3}}{2y_1-\sqrt{3}x_1+2\sqrt{3}}-\dfrac{-4y_1+2\sqrt{3}x_1+4\sqrt{3}}{2y_1+\sqrt{3}x_1+2\sqrt{3}}$

$$=2\frac{\left(2y_1+\sqrt{3}x_1-2\sqrt{3}\right)\left(2y_1+\sqrt{3}x_1+2\sqrt{3}\right)-\left(2y_1-\sqrt{3}x_1+2\sqrt{3}\right)\left(-2y_1+\sqrt{3}x_1+2\sqrt{3}\right)}{\left(2y_1-\sqrt{3}x_1+2\sqrt{3}\right)\left(2y_1+\sqrt{3}x_1+2\sqrt{3}\right)}$$

$$=2\frac{\left[\left(2y_1+\sqrt{3}x_1\right)^2-12\right]-\left[12-\left(\sqrt{3}x_1-2y_1\right)^2\right]}{\left(2y_1-\sqrt{3}x_1+2\sqrt{3}\right)\left(2y_1+\sqrt{3}x_1+2\sqrt{3}\right)}$$

$$=2\frac{6x_1^2+8y_1^2-24}{\left(2y_1-\sqrt{3}x_1+2\sqrt{3}\right)\left(2y_1+\sqrt{3}x_1+2\sqrt{3}\right)},$$ ……………14 分

因为 P 在椭圆上，所以 $\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1$，即 $3x_1^2+4y_1^2=12$，

故 $x_M-x_N=0$，所以 $|MC|=|NC|$． ……………16 分

4．解：（1）因为$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列，所以 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}\times2=n^2+(a_1-1)n$.

因为 S_n 是 Z(1)数列，所以任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$S_{n+1}\geqslant S_n$，

所以 $S_{n+1}-S_n=2n+a_1\geqslant0$，即 $a_1\geqslant-2n$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$恒成立，

所以 a_1 的取值范围是$[-2，+\infty)$. ……………4 分

（2）①由 $3T_1=R_1^2+4R_1$，得 $3b_1^2=b_1^2+4b_1$，即 $b_1^2-2b_1=0$.

因为 $b_1>0$，所以 $b_1=2$.

因为 $3T_n=R_n^2+4R_n$，所以 $3T_{n+1}=R_{n+1}^2+4R_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

两式相减得，$3b_{n+1}^2=R_{n+1}^2-R_n^2+4b_{n+1}=(R_{n+1}+R_n)(R_{n+1}-R_n)+4b_{n+1}$. $n\in\mathbf{N}^*$，

因为 $b_{n+1}>0$，所以 $3b_{n+1}=R_{n+1}+R_n+4$，$n\in\mathbf{N}^*$， ……………6 分

所以 $3b_{n+2}=R_{n+2}+R_{n+1}+4$，$n\in\mathbf{N}^*$，

两式相减得，$3b_{n+2}-3b_{n+1}=b_{n+2}+b_{n+1}$，即 $b_{n+2}=2b_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

因为 $b_n>0$，所以当 $n\geq2$ 时，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$. ……………8 分

又由 $3T_2=R_2^2+4R_2$，得 $3(4+b_2^2)=(2+b_2)^2+4(2+b_2)$，

即 $b_2^2-4b_2=0$．因为 $b_2>0$，所以 $b_2=4$，所以$\dfrac{b_2}{b_1}=2$，

所以对 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$ 成立，

所以数列$\{b_n\}$是首项为 2，公比为 2 的等比数列. ……………10 分

附加题

1．解：因为向量 $\boldsymbol{e_1}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ 是矩阵 $M=\begin{bmatrix}1 & b\\c & 2\end{bmatrix}$ 的属于特征值 4 的一个特征向量，

所以 $\begin{bmatrix}1 & b\\c & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\12\end{bmatrix}$，

即 $2+3b=8$，$2c+6=12$，解得 $b=2$，$c=3$，

所以 $M=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 2\end{bmatrix}$． …………… 5 分

所以 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\-3 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)-6=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda+1)(\lambda-4)$，

令 $f(\lambda)=0$，$f(\lambda)=-1$ 或 4，则矩阵 M 的另一个特征值为 -1． …………… 10 分

2．解：以极点为坐标原点，极轴为 x 轴正半轴建立平面直角坐标系，

所以 $A\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{6}\right)$，$B(3,0)$ 的直角坐标为 $A\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B(3,0)$，

故直线 l 的普通方程为 $x+\sqrt{3}y-3=0$， ………… 4 分

又曲线 C：$\rho=a\cos\theta(a>0)$ 的普通方程为 $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}\ (a>0)$， ………… 8 分

因为直线 l 与曲线 C 有且只有一个公共点，且 $a>0$，

所以 $\dfrac{\left|\dfrac{a}{2}-3\right|}{2}=\dfrac{a}{2}$，解得 $a=2$（负值已舍）． ………… 10 分

3．解：（1）20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $f(p)=C_{20}^{2}p^2(1-p)^{18}$，

因此 $f'(p)=C_{20}^{2}\cdot\left[2p(1-p)^{18}-18p^2(1-p)^{17}\right]=380p(1-p)^{17}(1-10p)$，…… 2 分

令 $f'(p)=0$，得 $p=\dfrac{1}{10}$，因为 $0<p<1$，

所以当 $p\in\left(0,\dfrac{1}{10}\right)$ 时，$f'(p)>0$，$f(p)$ 单调递增；

当 $p\in\left(\dfrac{1}{10},1\right)$ 时，$f'(p)<0$，$f(p)$ 单调递减，

故当 $p=\dfrac{1}{10}$ 时，$f(p)$ 取得最大值，即 $p_0=\dfrac{1}{10}$． …………… 5 分

（2）由（1）知，$p=\dfrac{1}{10}$．

X 的取值为 30，60，90，120．

则 $P(X=30)=C_3^0\left(\dfrac{9}{10}\right)^3$，$P(X=60)=C_3^1\left(\dfrac{1}{10}\right)\times\left(\dfrac{9}{10}\right)^2$，

$P(X=90)=C_3^2\left(\dfrac{1}{10}\right)^2\left(\dfrac{9}{10}\right)$，$P(X=120)=C_3^3\left(\dfrac{1}{10}\right)^3$， …………… 8 分

X	30	60	90	120
P	$C_3^0\left(\frac{9}{10}\right)^3$	$C_3^1\left(\frac{1}{10}\right)\times\left(\frac{9}{10}\right)^2$	$C_3^2\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)$	$C_3^3\left(\frac{1}{10}\right)^3$

所以 $E(X)=30\times\left(\dfrac{9}{10}\right)^3+60\times3\times\dfrac{9^2}{10^3}+90\times3\times\dfrac{9}{10^3}+120\times\dfrac{1}{10^3}=39$（元）． ……… 10 分