

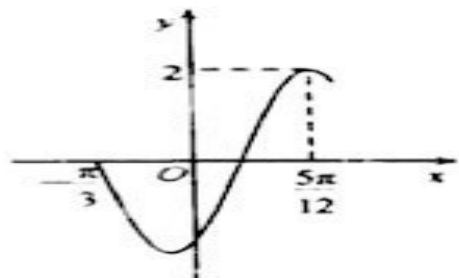
江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三数学

周三练习 (13)

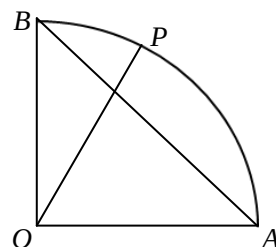
2018.12.12

范围: 集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、直线与圆、圆锥曲线、不等式、数列

一. 填空题: 本大题共 14 小题, 每小题 5 分, 计 70 分. 不需写出解答过程, 请把答案写在答题纸的指定位置上.

1. 已知集合 $A = \{x | 0 < x < 2\}$, $B = \{x | -1 < x < 1\}$, 则 $A \cap B =$ _____.2. 已知复数 z 满足 $(1+i)z = i$, 其中 i 为虚数单位, 则复数 z 的实部为_____.3. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{3}$, $AC = 2$, $\angle A = 30^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.4. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的离心率为_____.5. 已知函数 $f(x) = 2\cos(x + \frac{\pi}{3})$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}]$, 则函数 $f(x)$ 的值域是_____.6. 已知函数 $y = \ln(x-4)$ 的定义域为 A , 集合 $B = \{x | x > a\}$, 若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充分不必要条件, 则实数 a 的取值范围为_____.7. 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则函数的解析式为_____.8. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} x+y-2 \geq 0 \\ y-x-1 \leq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$, 则 $z = \frac{x+y}{x}$ 的最大值为_____.9. 已知公差为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_2 = 6$, 若 a_1, q, a 成等比数列, 则 $S_8 =$ _____.10. 如图, 在半径为 2 的扇形 AOB 中, $\angle AOB = 90^\circ$, P 为 AB 上的一点, 若 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 2$, 则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的值为_____.

第 7 题



(第 10 题)

11. 已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 3$, $|x| \neq |y|$, 则 $\frac{1}{(2x+y)^2} + \frac{4}{(x-2y)^2}$ 的最小值为_____.12. 已知点 P 是圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上的动点, 点 $A(4,0)$, 若直线 $y = kx + 1$ 上总存在点 Q , 使点 Q 恰是线段 AP 的中点, 则实数 k 的取值范围为_____.

13. 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公比为 2, 前 n 项的和为 S_n , 若 $\log_2 \left[\frac{1}{4} a_n (S_{4n} + 1) \right] = 7$, 则 $\frac{1}{n} + \frac{4}{m}$ 的最小值为_____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_n a_{n+1} + a_n + 3a_{n+1} + 2 = 0$, 其中 $a_1 = -\frac{1}{2}$, 设 $b_n = \frac{n-\lambda}{a_n+1}$, 若 b_3 为数列 $\{b_n\}$ 中唯一最小项, 则实数 λ 的取值范围是_____.

二、解答题: 本大题共 6 小题, 共计 90 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a + 2c = 2b \cos A$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $b = 2\sqrt{3}$, $a + c = 4$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 已知 $\vec{a} = (1 + \cos \omega x, 1)$, $\vec{b} = (\sqrt{3}, -\sin \omega x)$, ($\omega > 0$), 函数 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b}$, 函数 $f(x)$ 的最小正周期为

π . (1) 求函数 $f(x)$ 的表达式; (2) 设 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $f\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{3} + \frac{6}{5}$, 求 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ 值.

17. 已知 $k \in R$, 函数 $f(x) = x^2 + (1-k)x + 2 - k$

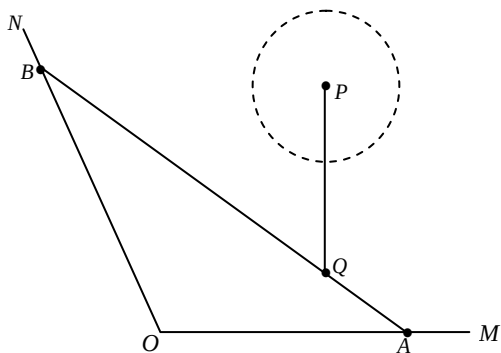
(1) 解关于 x 的不等式 $f(x) < 2$

(2) 对任意 $x \in (-1, 2)$, $f(x) \geq 1$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围

18. 如图, A 、 B 是海岸线 OM 、 ON 上的两个码头, Q 为海中一小岛, 在水上旅游线 AB 上. 测得 $\tan \angle MON = -3$, $OA = 6\text{km}$, Q 到海岸线 OM 、 ON 的距离分别为 2km , $\frac{7\sqrt{10}}{5}\text{km}$.

(1) 求水上旅游线 AB 的长;

(2) 海中 P ($PQ = 6\text{km}$, 且 $PQ \perp OM$) 处的某试验产生的强水波圆 P , 生成 t 小时时的半径为 $r = 6\sqrt{6}t^{\frac{3}{2}}\text{km}$. 若与此同时, 一艘游轮以 $18\sqrt{2}\text{km}/\text{小时}$ 的速度自码头 A 开往码头 B , 试研究强水波是否波及游轮的航行?

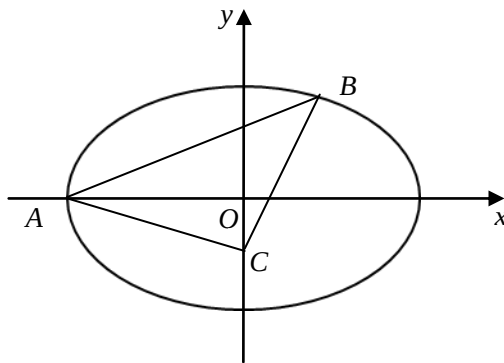


(第 18 题图)

19. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 $A(-2, 0)$ ，离心率为 $\frac{1}{2}$ ，过点 A 的直线 l 与椭圆 E 交于另一点 B ，点 C 为 y 轴上的一点.

(1) 求椭圆 E 的标准方程；

(2) 若 $\triangle ABC$ 是以点 C 为直角顶点的等腰直角三角形，求直线 l 的方程.



(第 19 题)

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足 $S_n = 2a_n - 1$ ， $n \in \mathbb{N}^*$. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $nb_{n+1} - (n+1)b_n = n(n+1)$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ ，且 $b_1 = 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $c_n = a_n \cdot \sqrt{b_n}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ，都有 $T_n \leq nS_n - a$ ，求实数 a 的取值范围；

(3) 是否存在正整数 m, n ，使 b_1, a_m, b_n ($n > 1$) 成等差数列，若存在，求出所有满足条件的 m, n ，若不存在，请说明理由.

江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三数学

周三练习 (13) 参考答案

2018. 12. 12

$$1. (0, 1) \quad 2. \frac{1}{2} \quad 3. \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 4. 2 \quad 5. [-1, 2] \quad 6. (-\infty, 4) \quad 7. f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$$

$$8. 4 \quad 9. 88 \quad 10. -2 + 2\sqrt{3} \quad 11. \frac{3}{5} \quad 12. [-\frac{4}{3}, 0] \quad 13. \frac{11}{3} \quad 14. (5, 7)$$

$$15. (1) \text{ 因为 } a + 2c = 2b\cos A,$$

$$\text{由正弦定理, 得 } \sin A + 2\sin C = 2\sin B\cos A. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } C = \pi - (A + B),$$

$$\text{所以 } \sin A + 2\sin(A + B) = 2\sin B\cos A.$$

$$\text{即 } \sin A + 2\sin A\cos B + 2\cos A\sin B = 2\sin B\cos A,$$

$$\text{所以 } \sin A \cdot (1 + 2\cos B) = 0. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \sin A \neq 0, \text{ 所以 } \cos B = -\frac{1}{2}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } 0 < B < \pi,$$

$$\text{所以 } B = \frac{2\pi}{3}. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由余弦定理 } a^2 + c^2 - 2ac\cos B = b^2 \text{ 及 } b = 2\sqrt{3} \text{ 得, } a^2 + c^2 + ac = 12,$$

$$\text{即 } (a + c)^2 - ac = 12. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } a + c = 4,$$

$$\text{所以 } ac = 4, \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$16. \text{ 解: (1) } f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}(1 + \cos \omega x) - \sin \omega x = \sqrt{3} - 2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{因为函数 } f(x) \text{ 的最小正周期为 } \pi, \text{ 所以 } \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \text{ 解得 } \omega = 2. \therefore f(x) = \sqrt{3} - 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 } f\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{3} + \frac{6}{5}, \text{ 得 } \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{5} \because \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \therefore \theta - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\therefore \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{5} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left[\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3}\right] = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{4}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}-4}{10} \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

17. 解:

$$(1) f(x) = x^2 + (1-k)x + 2 - k < 2$$

$$\text{即: } x^2 + (1-k)x - k < 0 \quad \therefore (x-k)(x+1) < 0$$

①当 $k = -1$ 时, 不等式的解集为: $\emptyset$

②当 $k > -1$ 时, 不等式的解集为: $-1 < x < k$

③当 $k < -1$ 时, 不等式的解集为: $k < x < -1$.

$$(2) f(x) = x^2 + (1-k)x + 2 - k \geq 1 \quad \therefore x^2 + x + 1 \geq k(x+1)$$

$$\because x \in (-1, 2), \therefore 0 < x+1 < 3 \quad \therefore k \leq \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$$

$\therefore$ 对任意的 $x \in (-1, 2)$, $f(x) \geq 1$ 恒成立

$\therefore$ 对任意的 $x \in (-1, 2)$, $k \leq \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$ 恒成立

$$\text{即: } k \leq \left(\frac{x^2 + x + 1}{x+1} \right)_{\min} \text{ 对任意的 } x \in (-1, 2)$$

令 $t = x+1 \in (0, 3)$, 则 $x = t-1$

$$\therefore \frac{x^2 + x + 1}{x+1} = \frac{(t-1)^2 + (t-1) + 1}{t} = \frac{t^2 - t + 1}{t} = t + \frac{1}{t} - 1 \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} - 1 = 1$$

当且仅当: “ $t = \frac{1}{t}$ ”, 即: “ $t = 1$ ”时, 取“=”

$\therefore k \leq 1$, 即实数 k 的取值范围 $(-\infty, 1]$.

18. 解: (1) 以点 O 为坐标原点, 直线 OM 为 x 轴, 建立直角坐标系如图所示.

则由题设得: $A(6, 0)$, 直线 ON 的方程为 $y = -3x$, $Q(x_0, 2)(x_0 > 0)$, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}

由 $\frac{|3x_0 + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{5}$, 及 $x_0 > 0$ 得 $x_0 = 4$, $\therefore Q(4, 2)$ \dots\dots\dots 4 \text{ 分}

$\therefore$ 直线 AQ 的方程为 $y = -(x-6)$, 即 $x + y - 6 = 0$, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}

$$\text{由} \begin{cases} y = -3x, \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} x = -3, \\ y = 9, \end{cases} \text{即 } B(-3, 9),$$

$$\therefore AB = \sqrt{(-3-6)^2 + 9^2} = 9\sqrt{2}, \text{ 即水上旅游线 } AB \text{ 的长为 } 9\sqrt{2} \text{ km}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

(2) 设试验产生的强水波圆 P , 生成 t 小时时, 游轮在线段 AB 上的点 C 处,

$$\text{则 } AC = 18\sqrt{2}t, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \quad \therefore C(6-18t, 18t), \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

令 $h(t) = r^2 - PC^2$,

则 $\because P(4, 8), r = 6\sqrt{6t^{\frac{3}{2}}}$,

$\therefore h(t) = (6\sqrt{6t^{\frac{3}{2}}})^2 - [(2-18t)^2 + (18t-8)^2]$
 $= 18(12t^3 - 36t^2 + 20t) - 68, 0 \leq t \leq \frac{1}{2},$ 12 分

$\therefore h'(t) = 18(12 \times 3t^2 - 36 \times 2t + 20)$
 $= 72(9t^2 - 18t + 5)$
 $= 72(3t-1)(3t-5), 0 \leq t \leq \frac{1}{2},$ 14 分

由 $h'(t) = 0$ 得 $t = \frac{1}{3}$ 或 $t = \frac{5}{3}$ (舍去)

x	$(0, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$
$h'(t)$	+	-

$\therefore [h(t)]_{\max} = h(\frac{1}{3}) = 6^3 \times (\frac{1}{3})^3 - [(2-6)^2 + (6-8)^2] = -12 < 0,$

$\therefore 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ 时, $h(t) < 0$, 即 $r < PC$ 恒成立,

亦即强水波不会波及游轮的航行.16 分

19. (1) 由题意可得: $\begin{cases} a=2 \\ e=\frac{1}{2} \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a=2 \\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2} \end{cases}$,

从而有 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$,

所以椭圆 E 的标准方程为: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$4 分

(2) 设直线 l 的方程为 $y = k(x+2)$, 代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$,

得 $(3+4k^2)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0$,

因为 $x = -2$ 为该方程的一个根, 解得 $B(\frac{6-8k^2}{3+4k^2}, \frac{12k}{3+4k^2})$,6 分

设 $C(0, y_0)$, 由 $k_{AC} \cdot k_{BC} = -1$, 得: $\frac{y_0}{2} \cdot \frac{\frac{12k}{3+4k^2} - y_0}{\frac{6-8k^2}{3+4k^2}} = -1$,

即: $(3+4k^2)y_0^2 - 12ky_0 + (16k^2 - 12) = 0$ (*)10 分

由 $AC = BC$, 即 $AC^2 = BC^2$, 得 $4 + y_0^2 = (\frac{6-8k^2}{3+4k^2})^2 + (y_0 - \frac{12k}{3+4k^2})^2$,

即 $4 = (\frac{6-8k^2}{3+4k^2})^2 + (\frac{12k}{3+4k^2})^2 - \frac{24k}{3+4k^2}y_0$,

即 $4(3+4k^2)^2 = (6-8k^2)^2 + 144k^2 - 24k(3+4k^2)y_0$,

所以 $k = 0$ 或 $y_0 = \frac{-2k}{3+4k^2}$,13 分

当 $k=0$ 时, 直线 l 的方程为 $y=0$,

当 $y_0 = \frac{-2k}{3+4k^2}$ 时, 代入 (*) 得 $16k^4 + 7k^2 - 9 = 0$, 解得 $k = \pm \frac{3}{4}$,

此时直线 l 的方程为 $y = \pm \frac{3}{4}(x+2)$.

综上, 直线 l 的方程为 $y=0$, $y = \pm \frac{3}{4}(x+2)$16 分

20. (1) 当 $n=1$ 时, $S_1 = 2a_1 - 1 = a_1$, 所以 $a_1 = 1$.

当 $n \geq 2$ 时, $S_n = 2a_n - 1$, $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 1$,

两式相减得 $a_n = 2a_{n-1}$, 从而数列 $\{a_n\}$ 为首项 $a_1 = 1$, 公比 $q=2$ 的等比数列,

从而数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{n-1}$.

由 $nb_{n+1} - (n+1)b_n = n(n+1)$ 两边同除以 $n(n+1)$, 得 $\frac{b_{n+1}}{n+1} - \frac{b_n}{n} = 1$

从而数列 $\{\frac{b_n}{n}\}$ 为首项 $b_1 = 1$, 公差 $d=1$ 的等差数列, 所以 $\frac{b_n}{n} = n$,

从而数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = n^2$4 分

(2) 由 (1) 得 $c_n = a_n \sqrt{b_n} = n \cdot 2^{n-1}$,

于是 $T_n = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \cdots + (n-1) \times 2^{n-2} + n \times 2^{n-1}$,

所以 $2T_n = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + (n-1) \times 2^{n-1} + n \times 2^n$

两式相减得 $-T_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} - n \times 2^n = \frac{1-2^n}{1-2} - n \times 2^n$, 所以 $T_n = (n-1) \cdot 2^n + 1$,

由 (1) 得 $S_n = 2a_n - 1 = 2^n - 1$,8 分

因为对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $T_n \leq nS_n - a$, 即 $(n-1) \cdot 2^n + 1 \leq n(2^n - 1) - a$ 恒成立,

所以 $a \leq 2^n - n - 1$ 恒成立, 记 $c_n = 2^n - n - 1$, 所以 $a \leq (c_n)_{\min}$,10 分

因为 $c_{n+1} - c_n = (2^{n+1} - (n+1) - 1) - (2^n - n - 1) = 2^n - 1 > 0$,

从而数列 $\{c_n\}$ 为递增数列, 所以当 $n=1$ 时 c_n 取最小值 $c_1 = 0$, 于是 $a \leq 0$12 分

(3) 假设存在正整数 m, n ($n > 1$), 使 b_1, a_m, b_n 成等差数列, 则 $b_1 + b_n = 2a_m$, 即 $1 + n^2 = 2^m$,

若 n 为偶数, 则 $1 + n^2$ 为奇数, 而 2^m 为偶数, 上式不成立.

若 n 为奇数, 设 $n = 2k - 1$ ($k \in \mathbf{N}^*$), 则 $1 + n^2 = 1 + (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 2 = 2^m$,

于是 $2k^2 - 2k + 1 = 2^{m-1}$, 即 $2(k^2 - k) + 1 = 2^{m-1}$,

当 $m=1$ 时, $k=1$, 此时 $n=2k-1=1$ 与 $n > 1$ 矛盾;

当 $m \geq 2$ 时, 上式左边为奇数, 右边为偶数, 显然不成立.

综上所述, 满足条件的实数对 (m, n) 不存在.16 分